Teorema de Rolle y Teorema del Valor medio

Teorema de Rolle:

Si f es una función en la que se cumple:

(i) f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$

(ii) f es diferenciable en el intervalo abierto (a, b)

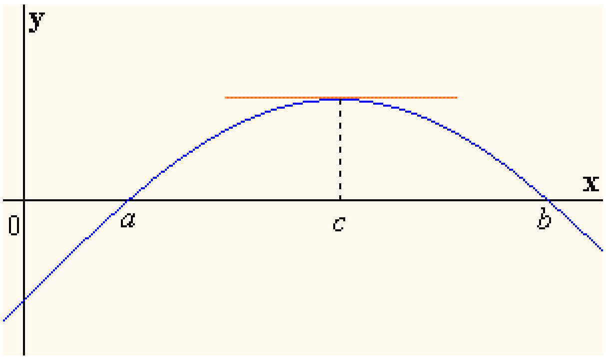
(iii) $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$

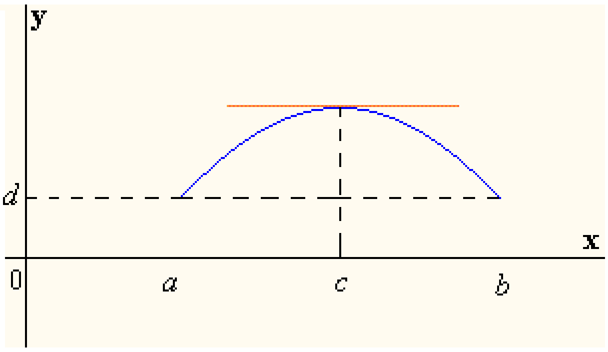
Entonces, existe un número c que pertenece a (a, b) tal que

$$f'(c) = 0$$

El Teorema de Rolle se atribuye al matemático francés Michel Rolle (1652-1719).

En la figura de la derecha se ilustra la interpretación geométrica del Teorema de Rolle. Como se puede observar se cumplen las tres condiciones que requiere el Teorema: f es continua en $[a, b]$ e integrable en (a, b), y $f(a) = f(b) = 0$. También se puede observar el punto (cuya abscisa es c) donde la recta tangente a la gráfica de f es paralela al eje x, es decir donde se cumple que $f'(c) = 0$.





El Teorema de Rolle es susceptible de una modificación en su enunciado que no altera para nada la conclusión del mismo. Esta se refiere al punto (iii) $f(a) = f(b)$: basta con que el valor de la función sea el mismo para $x = a$ y $x = b$ y no necesariamente sean iguales a cero. En la figura de la izquierda se ilustra este hecho.

Teorema del Valor medio:

Si f es una función en la que se cumple que:

(i) f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$

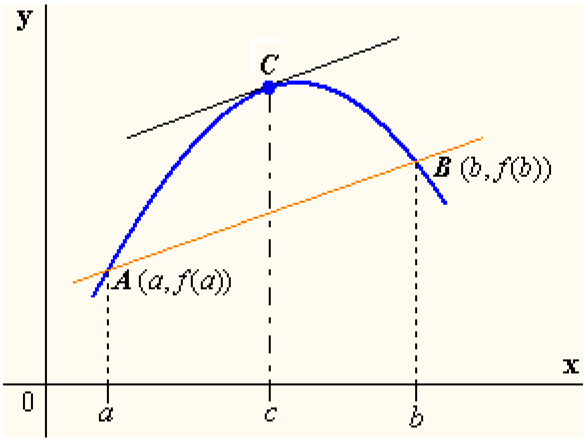
(ii) f es diferenciable en el intervalo abierto (a, b)

Entonces, existe un número c que pertenece a (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

A la izquierda se observa una ilustración de la interpretación geométrica del Teorema del Valor medio.

El teorema afirma que si la función es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), existe un punto C en la curva, entre A y B, donde la recta tangente es paralela a la recta



que pasa por A y B. Esto es,

$$\exists\, c \in (a,b), \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ejercicios resueltos

En los ejercicios 1 a 3, verifique que las condiciones (i), (ii) y (iii) de la hipótesis del Teorema de Rolle se cumplen para la función indicada en el intervalo dado. Luego halle un valor adecuado para *c* que satisfaga la conclusión del teorema de Rolle.

En los ejercicios 4 a 9, compruebe que la hipótesis del Teorema del Valor medio se cumple para la función dada en el intervalo indicado. Luego halle un valor adecuado para *c* que cumpla la conclusión del Teorema del valor medio.

En los ejercicios 10 a 12, (a) trace la gráfica de la función dada en el intervalo indicado; (b) compruebe las tres condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle y determine cuáles se cumplen y cuáles, de haberlas, no se cumplen; (c) si las tres condiciones se cumplen, determine un punto por el cual pase una recta tangente horizontal.

En los ejercicios 13 y 14, calcule un valor de *c* que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio, trace la gráfica de la función y la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3;\ [1,3]$	**2.** $f(x) = \operatorname{sen} 2x;\ \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$	**3.** $f(x) = 3\cos 2x;\ \left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$
4. $f(x) = x^2 + 2x - 1;\ [0, 1]$	**5.** $f(x) = x^3 + x^2 - x;\ [-2, 1]$	**6.** $f(x) = x^{2/3};\ [0, 1]$
7. $f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen} x};\ \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$	**8.** $f(x) = \sqrt{1 + \cos x};\ \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$	
9. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 7};\ [2, 6]$	**10.** $f(x) = x^{4/3} - 3x^{1/3};\ [0, 3]$	**11.** $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 3};\ [-3, 4]$
12. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 1 \\ 5x - 8 & \text{si } x \geq 1 \end{cases};\ \left[-2, \frac{8}{5}\right]$		**13.** $f(x) = x^2;\ a = 2,\ b = 4$
14. $f(x) = \operatorname{sen} x;\ a = 0,\ b = \frac{1}{2}\pi$		

Soluciones

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3;\ [1, 3]$

Solución:

(i) f es una función polinomial; por lo tanto f es continua en $\mathbb{R}$ y, en particular, continua en $[1, 3]$

(ii) f es una función polinomial; por lo tanto f es diferenciable en $\mathbb{R}$ y, en particular, f es diferenciable en $(1,3)$

(iii) $f(1) = 1^2 - 4(1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 4 - 4 = 0$

$f(3) = 3^2 - 4(3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 12 - 12 = 0$

$\therefore\ f(1) = f(3) = 0$

Concluimos, entonces, que $\exists c \in (1,3), t.q.\ f'(c) = 0$. Hallemos a c:

$f'(x) = 2x - 4,$

$\Rightarrow \quad f'(c) = 2c - 4 = 0 \ \Leftrightarrow \ c = 2.$

2. $f(x) = \text{sen}\, 2x;\ \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$

Solución:

(i) La función seno es continua en $\mathbb{R}$; por lo tanto es continua en $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$ y, además, $\text{sen}\, 2x$ es continua en $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$

(ii) f es diferenciable en $\mathbb{R}$ y, en particular, f es diferenciable en $\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$

(iii) $f(0) = \text{sen}\, 0 = 0$

$f(\frac{1}{2}\pi) = \text{sen}\, \pi = 0$

$\therefore\ f(0) = f(\frac{1}{2}\pi) = 0$

Concluimos, entonces, que $\exists c \in (0, \frac{1}{2}\pi), t.q.\ f'(c) = 0$. Hallemos a c:

$$f'(x) = 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

El único valor de x, de la forma $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ que está en $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$ es $\frac{\pi}{4}$ (cuando $k = 0$);

por lo tanto, un valor adecuado para c es $c = \frac{\pi}{4}$.

3. $f(x) = 3\cos 2x;\ \left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$

Solución:

f es continua en todo número y diferenciable en cualquier intervalo; por lo tanto, en particular

(i) f es continua en $\left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$

(ii) f es diferenciable en $\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$

(iii) $f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 3\cos^2(\pi/2) = 3 \cdot 0^2 = 0$

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 3\cos^2(3\pi/2) = 3 \cdot 0^2 = 0$

$\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$

Concluimos, entonces, que $\exists c \in \left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right),\ t.q.\ f'(c) = 0.$ Hallemos a c:

$$f'(x) = -6\cos x \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \cos x \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \operatorname{sen} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

ningún número de la forma $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ pertenece a $\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$

$c = \pi \in \left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ (para $k = 1$ en $k\pi$);

por lo tanto, un valor adecuado para c es $c = \pi$.

4. $f(x) = x^2 + 2x - 1;\ [0, 1]$

Solución:

f es una función polinomial; por lo tanto, f es continua y diferenciable en cualquier intervalo.

En particular

(i) f es continua en $[0, 1]$

(ii) f es diferenciable en $(0,1)$

Entonces existe un $\# \in (0,1)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2 - (-1)}{1}, \quad \Rightarrow f'(c) = 3 \quad (1)$$

Ahora,

$$f'(x) = 2x + 2, \quad \Rightarrow f'(c) = 2c + 2 \quad (2)$$

Igualando (1) y (2), se obtiene:

$$2c + 2 = 3 \Leftrightarrow 2c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}.$$

5. $f(x) = x^3 + x^2 - x;\ [-2, 1]$

Solución:

f es una función polinomial; por lo tanto, f es continua y diferenciable en todo número; y en particular:

(i) f es continua en $[-2, 1]$

(ii) f es diferenciable en $(-2, 1)$

Entonces, existe un $\#c \in (-2,1)$, tal que:

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-2)}{1-(-2)} = \frac{1-(-2)}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad (1)$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1, \Rightarrow f'(c) = 3c^2 + 2c - 1 \quad (2)$$

Igualando (1) y (2), se obtiene:

$$3c^2 + 2c - 1 = 1 \Leftrightarrow 3c^2 + 2c - 2 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+24}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$\left\{ \frac{-1+\sqrt{7}}{3}, \frac{-1-\sqrt{7}}{3} \right\} \in (-2, 1)$$

Por lo tanto, un valor adecuado para c es $c = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$ ó bien $c = \frac{-1-\sqrt{7}}{3}$.

6. $f(x) = x^{2/3}$; $[0, 1]$

Solución:

(i) f es continua en todo número, f existe $\forall x$ (la raíz cúbica de cualquier número real es un real); por lo tanto f es cntinua en $[0, 1]$

(ii) $f'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}}$: f' existe para todo $x \neq 0$; por ende, f es diferenciable en $(0,1)$

Entonces, existe un $\#c \in (0,1)$, tal que:

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1-0} = \frac{1-0}{1} = 1 \quad (1)$$

$$f'(c) = \frac{2}{3c^{1/3}}, c \neq 0 \quad (2)$$

Igualando (1) y (2), se obtiene:

$$1 = \frac{2}{3c^{1/3}} \Leftrightarrow c^{1/3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow c = \frac{8}{27}$$

$$\frac{8}{27} \in (0, 1);$$

Por lo tanto, un valor adecuado para c es $c = \frac{8}{27}$.

7. $f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$; $[0, \frac{1}{2}\pi]$

Solución:

(i) $f(x)$ existe cuando $1-\operatorname{sen} x \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \leq 1$. El contradominio de $\operatorname{sen} x$ es $[-1,1]$; por lo que $\operatorname{sen} x \leq 1$ es cierto para todo $x \in \mathbb{R}$. Conclusión: f es continua en $\left[0, \tfrac{1}{2}\pi\right]$

(ii) $f'(x) = \dfrac{-\cos x}{2\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}$, $1-\operatorname{sen} x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2}$; por lo que f es diferenciable en todo intervalo que excluya a $\dfrac{\pi}{2}$: f es diferenciable en $\left(0, \tfrac{1}{2}\pi\right)$

Entonces existe un $\#c \in \left(0, \tfrac{1}{2}\pi\right)$, tal que:

$$f'(c) = \frac{f(\pi/2)-f(0)}{\pi/2-0} = \frac{0-1}{\pi/2} = -\frac{2}{\pi} \quad (1)$$

$$f'(c) = \frac{-\cos c}{2\sqrt{1-\operatorname{sen} c}} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2), se obtiene:

$$\frac{-\cos c}{2\sqrt{1-\operatorname{sen} c}} = -\frac{2}{\pi} \Leftrightarrow 4\sqrt{1-\operatorname{sen} c} = \pi\cos c \Leftrightarrow 16(1-\operatorname{sen} c) = \pi^2\cos^2 c$$

$$\Leftrightarrow \quad 16(1-\operatorname{sen} c) = \pi^2(1-\operatorname{sen}^2 c) \Leftrightarrow 16\cancel{(1-\operatorname{sen} c)} = \pi^2\cancel{(1-\operatorname{sen} c)}(1+\operatorname{sen} c) \Leftrightarrow 16 = \pi^2(1+\operatorname{sen} c)$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen} c = \frac{16}{\pi^2}-1 \Leftrightarrow c = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{16}{\pi^2}-1\right) \Leftrightarrow c \approx 0.67$$

Por lo tanto, un valor adecuado para c es $c \approx 0.67$.

8. $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$; $\left[-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\right]$

Solución:

(i) $f(x)$ existe cuando $1+\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -1$. El contradominio de $\cos x$ es $[-1,1]$; por lo que $\cos x \geq -1$ es cierto para todo $x \in \mathbb{R}$. Conclusión: f es continua en $\left[-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\right]$

(ii) $f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{2\sqrt{1+\cos x}}$, $1+\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; por lo que f es diferenciable en todo intervalo que excluya a $(2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$: f es diferenciable en $\left(-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\right)$

Entonces existe un $\#c \in \left(-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\right)$, tal que:

$$f'(c) = \frac{f(\pi/2)-f(-\pi/2)}{\pi/2-(-\pi/2)} = \frac{\sqrt{1+\cos(\pi/2)}-\sqrt{1+\cos(-\pi/2)}}{\pi} = \frac{1-1}{\pi} = 0 \quad (1)$$

$$f'(c) = \frac{-\operatorname{sen} c}{2\sqrt{1+\cos c}} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2), se obtiene:

$$\frac{-\operatorname{sen} c}{2\sqrt{1+\cos c}} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} c = 0 \Leftrightarrow c = \operatorname{sen}^{-1} 0 \Leftrightarrow c = 0$$

Por lo tanto, un valor adecuado para c es $c = 0$.

9. $f(x) = \dfrac{x^2+4x}{x-7}$; $[2, 6]$

Solución:

(i) f es continua en $(-\infty, 7) \cup (7, \infty)$ y $[2, 6] \subset (-\infty, 7)$: f es continua en $[2, 6]$

(ii) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 14x - 28}{(x-7)^2}$; por lo que f es diferenciable en todo intervalo que excluya a 7 :

f es diferenciable en $(2, 6)$

Entonces existe un $\# c \in (2, 6)$, tal que:

$$f'(c) = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{60 - (-12/5)}{4} = -\frac{72}{5} \quad (1)$$

$$f'(c) = \frac{c^2 - 14c - 28}{(c-7)^2} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2), se obtiene:

$$\frac{c^2 - 14c - 28}{(c-7)^2} = -\frac{72}{5} \Leftrightarrow 5c^2 - 70c - 140 = -72c^2 + 1008c - 3528 \Leftrightarrow 77c^2 - 1078c + 3388 = 0,$$

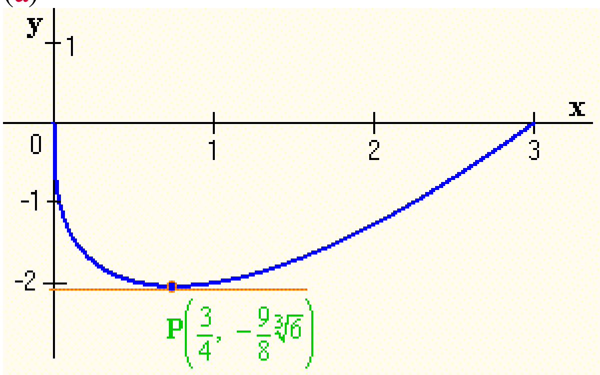
$$\Rightarrow \quad c^2 - 14c + 44 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 176}}{2} = 7 \pm \sqrt{5} : \; 7 - \sqrt{5} \in (2, 6)$$

Por lo tanto, un valor adecuado para c es $c = 7 - \sqrt{5}$.

10. $f(x) = x^{4/3} - 3x^{1/3}$; $[0, 3]$

Solución:

(a)



(b) (i) f es continua en $[0, 3]$

(ii) f es diferenciable en $(0, 3)$

(iii) $f(0) = f(3) = 0$

Entonces existe un $\# c \in (0, 3)$ tal que

$f'(c) = 0 \quad (1)$

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{4x - 3}{3x^{2/3}},$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{4c - 3}{3c^{2/3}} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2), se obtiene:

$$\frac{4c - 3}{3c^{2/3}} = 0 \Leftrightarrow 4c - 3 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{8}\sqrt[3]{6}$$

El punto **P**, coordenado, en la gráfica de f por donde pasa una recta tangente horizontal es

P$\left(\frac{3}{4}, -\frac{9}{8}\sqrt[3]{6}\right)$.

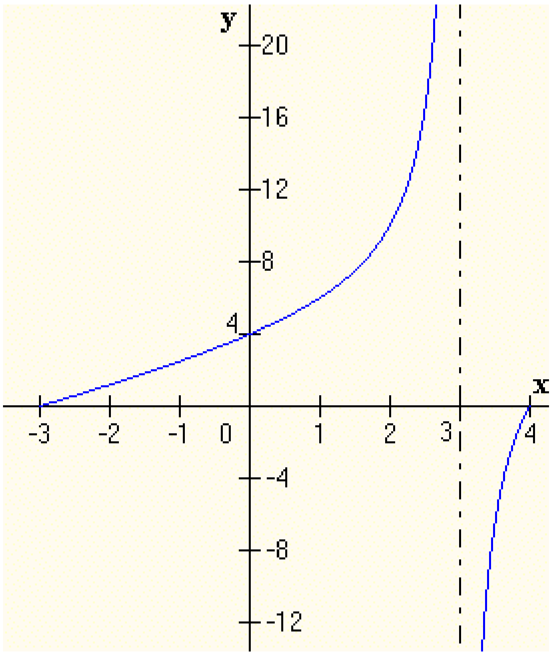
11. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 3}$; $[-3, 4]$

Solución:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 3}$, $x \neq 3$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

$x = 3$: asíntota vertical en la gráfica de f



(b) (i) f es continua en todo número, excepto en 3; y $3 \in [-3, 4]$; por lo que f es discontinua en $[-3, 4]$

No se cumple

(ii) $f'(x) = \dfrac{7}{(x-3)^2}$, $x \neq 3$: $f'(3)$ no existe;

f no es diferenciable en 3, y $3 \in (-3, 4)$;

$\therefore$ f no es diferenciable en $(-3, 4)$

No se cumple

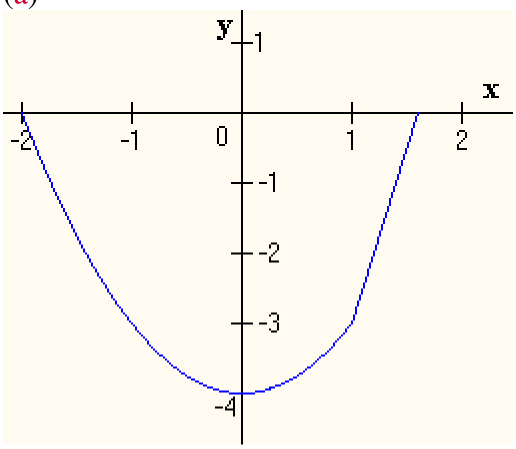
(iii) $f(-3) = f(4) = 0$

Se cumple.

12. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 1 \\ 5x - 8 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$; $\left[-2, \dfrac{8}{5}\right]$

Solución:

(a)



(b) 1: # sospechoso

(i) •) $f(1) = -3$

••) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -3$;

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -3$

•••) $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = -3$;

$\therefore$ f es continua en 1;

$\therefore$ f es continua en $\left[-2, \dfrac{8}{5}\right]$

(ii) $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 5 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} f'_-(1) = 2 \\ f'_+(1) = 5 \end{matrix}\right\}$: $f'(1)$ no existe; f no es diferenciable en 1; $1 \in \left(-2, \frac{8}{5}\right)$;

por lo tanto, f no es diferenciable en $\left(-2, \frac{8}{5}\right)$

Por lo que, la parte (ii) del teorema de Rolle no se cumple

(iii) $f(-2) = f(8/5) = 0$.

13. $f(x) = x^2$; $a = 2$, $b = 4$

Solución:

(i) f es una función polinomial; por lo que f es continua en $\mathbb{R}$ y en particular en $[2,4]$

(ii) $f'(x) = 2x$; $f'\ \exists \forall x \in \mathbb{R}$; por lo que f es diferenciable en $(2,4)$

Entonces existe un número $c \in (2,4)$, tal que:

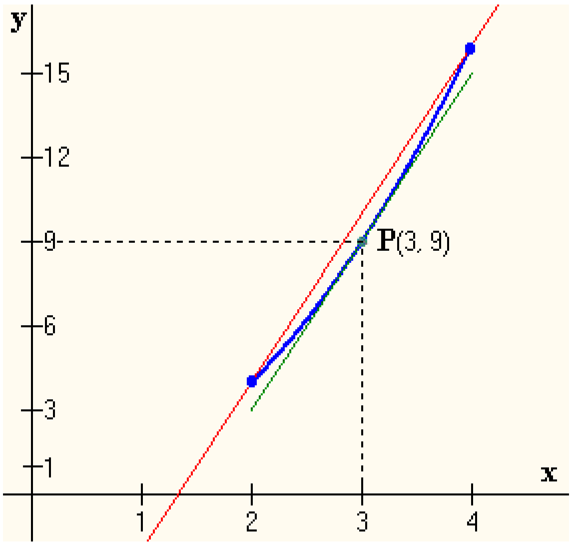
$f'(c) = \dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \dfrac{16 - 4}{2} = 6$ (1)

$f'(c) = 2c$ (2)

Igualando (1) y (2), se obtiene:

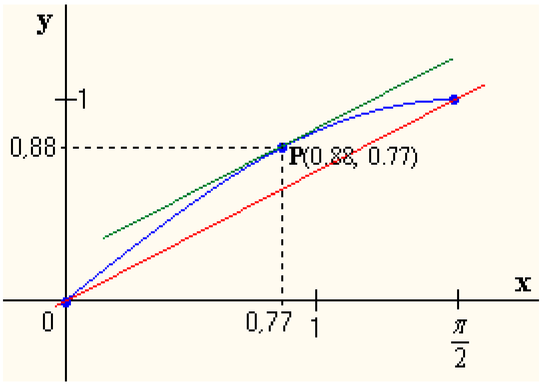
$2c = 6 \Leftrightarrow c = 3$ y $f(3) = 9$

El punto **P** coordenado por el que pasa una recta tangente a la gráfica de f que es paralela a la secante que pasa por los puntos (2,4) y (4,16) es **P**(3,9).



14. $f(x) = \text{sen } x$; $a = 0$, $b = \dfrac{1}{2}\pi$

Solución:



(i) f es continua en todo número; por lo tanto, f es continua en $[0, \pi/2]$

(ii) $f'(x) = \cos x$: f es diferenciable en todo #; por lo tanto, f es diferenciable en $(0, \pi/2)$

Entonces, debe existir un $\#c \in (0, \pi/2)$ tal que

$f'(c) = \dfrac{f(\pi/2) - f(0)}{\pi/2 - 0} = \dfrac{1 - 0}{\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}$ (1)

$f'(c) = \cos c$ (2)

Igualando (1) y (2), se obtiene:

$$\cos c = \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow c = \cos^{-1}(2/\pi) \Leftrightarrow c \approx 0.88$$

$$f(0.88) \approx 0.77$$

El punto **P** coordenado por el que pasa una recta tangente a la gráfica de f
que es paralela a la secante que pasa por los puntos (0,0) y ($\pi/2$, 1) es **P**(0.88, 0.77).