PLANIFICACIÓN DE LAS CLASES

Semana N° 01	Clase N° 01	Tema N° 01: Notación Matemática

Contenido General: el facilitador debe realizar una descripción de los símbolos matemáticos más conocidos y su notación.

Operación	Notación	Se lee	Una barra cruzada sobre el símbolo invierte el enunciado	
Pertenencia	$x \in A$	x pertenece a A	$x \notin A$	x *no* pertenece a A
Inclusión	$A \subset B$	A está contenido en B	$A \not\subset B$	A no está contenido en B
	$A \subseteq B$	A está contenido en B o es igual que B		
Unión	$A \cup B$	A unión B		
Intersección	$A \cap B$	A intersección B		
Igualdad	$x = y$	x es igual a y	$x \neq y$	x es diferente a y
menor que	$x < y$	x es menor que y		
mayor que	$x > y$	x es mayor que y		
menor o igual que	$x \leq y$	x es menor o igual que y		
mayor o igual que	$x \geq y$	x es mayor o igual que y		
Aproximado	$x \approx y$	x es aproximadamente igual a y		
cuantificador universal	$\forall x$	para todo x		
cuantificador existencial	$\exists\, x...$	Existe por lo menos un x		
tal que	x / y o bien $x : y$	x tal que y		
por lo tanto	$x \therefore y$	x por lo tanto y		
Vacío	ϕ	el *conjunto vacío*, que carece de elementos		
perpendicular	$x \perp y$	x es perpendicular a y		
Paralelo	x // y	x es paralelo a y		

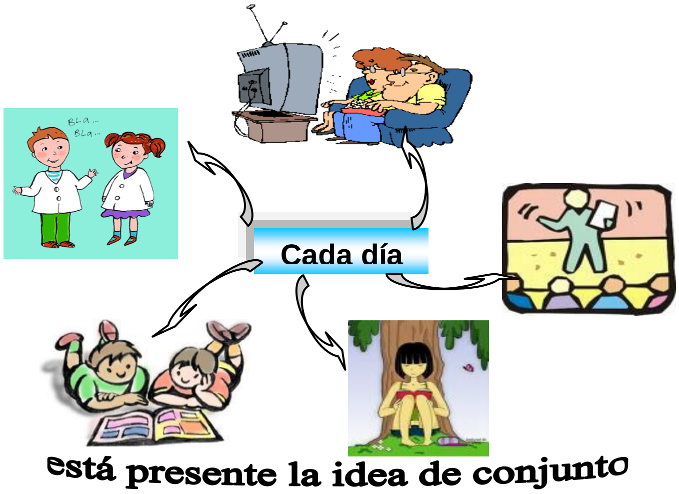
Semana N° 01	Clase N° 01	Tema N° 02: Conjuntos y Subconjuntos

Contenido General: el facilitador debe dar una breve definición de los conceptos relacionados con los conjuntos.

Contenidos Específicos:

- Definición de Conjunto y Ejemplos
- Definición de Subconjunto y Ejemplos

CONJUNTO:



En Matemática el término de Conjunto es considerado como un concepto primitivo (nociones primarias que no se definen en términos de otra noción), el cual será utilizado con el mismo significado que se le da en la vida diaria, es decir, como una agrupación o colección de objetos denominados elementos.

Generalmente designaremos los conjuntos con letras **MAYÚSCULAS** de imprenta y anotaremos sus elementos entre llaves con letras **minúsculas**.

Llamaremos elemento, a cada uno de los objetos que forman parte del conjunto, éstos tienen cualidades que nos permiten diferenciarlos, y cada uno de ellos es único.

En teoría de conjunto no se acostumbra repetir los elementos, por ejemplo:
El conjunto
$W = \{ r , r , r , m , m , k$
simplemente será
$W = \{ r , m , k \}$

Ejemplos:

- Las partes de una computadora se pueden expresar en forma de conjunto de la siguiente forma: $C = \{ cpu \, , \; monitor \, , \; regulador \, , \; teclado \, , \; mouse \, , \; cornetas \}$
- Las vocales están descritas en forma de conjunto como: $M = \{ a , e , i , o , u \}$

- El conjunto de las estaciones del año como:

  $S = \{ primavera,\ otoño,\ verano,\ invierno \}$

Por otro lado, diremos que un conjunto está **definido por extensión** si enumeramos todos los elementos que lo forman y un conjunto está **definido por comprensión** si establecemos una o varias propiedades que caracterizan a todos los elementos del conjunto y solo a ellos.

Ejemplos:

- El conjunto de las vocales se escribe:

  Por extensión: $M = \{ a , e , i , o , u \}$

  Por comprensión: $M = \{ x : x \ es \ una \ vocal \}$

- El conjunto de los ingredientes para hacer una merengada de fresa

  Por extensión: $F = \{ fresas ,\ agua ,\ leche ,\ azúcar \}$

  Por comprensión:

  $F = \{ x : x \ es \ un \ ingrediente \ para \ una \ merengada \ de \ fresa \}$

Ejercicios

1. Construye por extensión los siguientes conjuntos:
   - $A = \{ x : x \ es \ un \ accesorio \ femenino \ para \ el \ cabello \}$
   - $B = \{ x : x \ es \ un \ miembro \ de \ tu \ familia \}$
   - $C = \{ x : x \ es \ un \ número \ impar \}$
   - $D = \{ x : x \ es \ un \ útil \ escolar \ para \ un \ niño \ de \ tercer \ grado \}$
   - $E = \{ x : x \ es \ un \ color \ primario \}$

2. Construye por comprensión los siguientes conjuntos:
   - $F = \{ 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , ... \}$
   - $G = \{ pez ,\ tiburón ,\ ballena ,\ raya ,\ medusa \}$
   - $H = \{ portada ,\ índice ,\ introducción ,\ desarrollo,\ conclusión ,\ bibliografía \}$

- $I = \left\{ \begin{array}{l} \textit{humanidades y educación, faces, ciencias, geografía,} \\ \textit{ingeniería, medicina, bioanílisis y farmacia, forestal,} \\ \textit{odontología, arquitectura, ciencias jurídicas y políticas,} \\ \textit{arte} \end{array} \right\}$
- $J = \{ \textit{licuadora, batidora, microhondas, nevera, cafetera} \}$

SUBCONJUNTO: Dados los conjuntos A y B, diremos que A es **subconjunto** de B si cada elemento de A es un elemento de B, y escribimos $A \subset B$

Ejemplos:

- Sean los conjuntos $A = \{ 2, 6, 7, 10 \}$ y $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$ entonces, A es un subconjunto de B, pues todos los elementos de A están en B, y se denota matemáticamente $A \subset B$.
- Sean los conjuntos

$T = \{ x : x \textit{ es mes del año} \}$ y $M = \{ \textit{enero, abril, mayo, noviembre} \}$, en este caso, M es subconjunto de T y se denota como $M \subset T$.

Cuando un conjunto no es subconjunto de otro, como por ejemplo los conjuntos B y A descritos anteriormente, se escribe que $B \not\subset A$.

Ejemplo:

Dados los conjuntos $A = \{ 0, 1, 2 \}$, $B = \{ -1, 0, 1, 2, 3 \}$ y $C = \{ 0, 1, 4 \}$.

Entonces A es subconjunto de B, ya que cada elemento que está en A también está en B, pero C no es subconjunto de B, pues 4 es un elemento de C que no está en B, así, escribimos $C \not\subset B$.

Ejercicios Propuestos:

Determine un subconjunto por extensión o por compresión de cada conjunto dado a continuación:

- $S = \{ x : x \textit{ es un número par} \}$
- $F = \{ x : x \textit{ es una letra del nombre de Mariana} \}$

- $H = \{ x : x \; es \; el \; número \; de \; estudiantes \; del \; curso \}$
- $L = \{ x : x \; es \; un \; deporte \}$
- $W = \{ x : x \; es \; un \; animal \}$
- $Z = \{ x : x \; es \; un \; estado \; de \; venezuela \}$
- $J = \{ x : x \; es \; un \; árbol \; frutal \}$
- $N = \{ x : x \; es \; un \; pais \; latinoamericano \}$
- $O = \{ x : x \; es \; una \; universidad \; de \; venezuela \}$
- $R = \{ x : x \; es \; un \; símbolo \; patrio \; de \; venezuela \}$

Semana N° 01	Clase N° 01	Tema N° 03: Conjuntos Numéricos

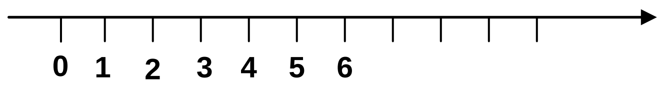
Contenido General: el facilitador debe dar una descripción general de los diferentes conjuntos numéricos.

Contenidos Específicos:

- Conjunto de números Naturales
- Conjunto de números Enteros
- Conjunto de números Racionales
- Conjunto de números Irracionales
- Conjunto de números Reales

La noción de número es tan antigua como el hombre mismo ya que son necesarios para resolver situaciones de la vida diaria. Es por ello que se dan a conocer los siguientes conjuntos numéricos:

1. Conjunto de Números Naturales ($\mathbb{N}$) $\quad \mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \dots\}$



El conjunto de los Números Naturales surgió de la necesidad de contar, lo cual se manifiesta en el ser humano desde sus inicios.

$\mathbb{N}$ se caracteriza porque: tiene un número infinito de elementos, cada elemento tiene un sucesor y todos, excepto el 0, un antecesor.

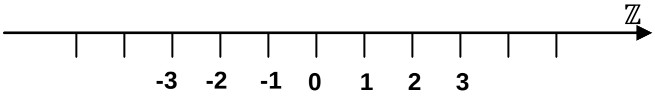
2. Conjunto de Números Enteros ($\mathbb{Z}$) $\quad \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

El conjunto de los números enteros surge de la necesidad de dar solución general a la sustracción, pues cuando el sustraendo es mayor que el minuendo, esta sustracción no tiene solución en el conjunto de los números Naturales ($\mathbb{N}$). Por ejemplo: $5-20=¿?$

Debido a esto, la recta numérica se extiende hacia la izquierda, de modo que a cada punto que representa un número natural le corresponda un "punto simétrico", situado a la izquierda de cero.

Punto simétrico es aquel que está situado a igual distancia del cero (uno a la derecha y el otro a la izquierda de él).

De esta manera, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^{-}$ ($\mathbb{N}^{-}$ es el conjunto de los números naturales negativos)



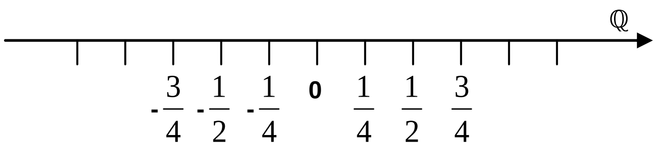
3. Conjunto de los Números Racionales ($\mathbb{Q}$)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \ldots, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots \right\}$$

El conjunto de los números racionales se creó debido a las limitaciones de cálculo que se presentaban en $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. Por ejemplo, sólo se puede dividir en el conjunto de números enteros si y sólo si el dividendo es múltiplo, distinto de cero, del divisor. Para solucionar esta dificultad, se creó este conjunto, el cual está formado por todos los números de la forma $\frac{a}{b}$.

Esta fracción, en la cual el numerador a, es un número entero, y el denominador b, es un entero distinto de cero.

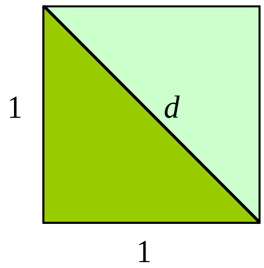
Así, $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in Z, \; b \neq 0 \right\}$



Note que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

4. Conjunto de Números Irracionales ($\mathbb{I}$)

. Los historiadores de la Matemática están de acuerdo en atribuir a Pitágoras de Samos en (540 a.C.) el descubrimiento de estos números, al establecer la relación entre el lado de un cuadrado de lado 1 y la diagonal del mismo.



Para hallar el valor de la diagonal hacemos uso del teorema de Pitágoras de la siguiente forma:

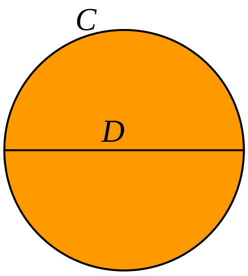
$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$$

Donde esta magnitud no deja ver ningún número entero ni fraccionario que la exprese.

Estas magnitudes se llaman inconmensurables, y los números originados al medirlas se llaman **Irracionales** (un número Irracional es cualquier número Real que no es Racional; es decir, un número que no puede ser expresado como una fracción).

Los números irracionales se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales que no siguen ningún patrón repetitivo (decimales no periódicos)

Otro ejemplo de estas magnitudes es la relación entre la longitud de una circunferencia y el diámetro de la misma, que se expresa con la letra $\pi = 3{,}141592\ldots$

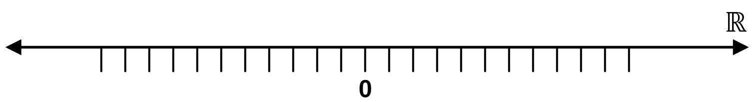


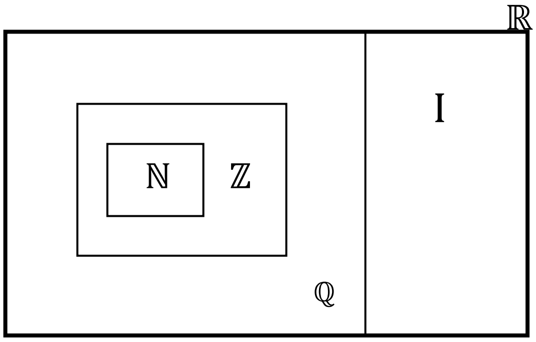
$$\frac{C}{D} = \pi = 3{,}141592\ldots$$

5. Conjunto de Números Reales ($\mathbb{R}$)

$\mathbb{R}$ es la unión de todos los conjuntos definidos anteriormente

Así, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$





Ejercicios

Completa la siguiente tabla, colocando $\in$ ó $\notin$ en el cuadro respectivamente, según que los números dados de la columna de la izquierda pertenezcan o no a los conjuntos dados en la primera fila:

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	I	$\mathbb{R}$
$\sqrt[3]{-1}$					
$3{,}8222\ldots$					
$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$					
$\frac{2}{5^{-\frac{1}{3}}}$					
$\sqrt[3]{\frac{2^{4}}{2^{-10}}}$					
$-\sqrt{\frac{0}{532}}$					
$\left[(5)^{\frac{7}{11}}\right]^{22}$					
$(-6)^{-\frac{2}{3}}$					
$[789]^{-236}\cdot[789]^{236}$					

Semana N° 01	Clase N° 02	Tema N° 04: Eliminación de Símbolos de Agrupación

Contenido General: el facilitador guiará a los estudiantes en el momento de resolver ejercicios que impliquen operaciones de números Enteros con eliminación de símbolos de agrupación.

Contenidos Específicos:

- Suma, resta, multiplicación y división de números $\mathbb{Z}$.

EJERCICIOS PARA RESOLVER	**EJERCICIOS PROPUESTOS**
$-5+4.(2-7)$	$-8-22-14+25$
$-2.(-12)-3.(5-6)+4$	$-3\left[4.(3-2)-(-5+16)+12\right]-16$
$5-2.\left[3.(7-4)-(-12+3)\right]-6$	$-\left\{-10.\left[7.8-(5-9)\right]+17\right\}+5$
$3.\left\{2.\left[-\left(3-2\right)+7.4-5.(11-6)\right]+8\right\}.\left(5-10+5\right)$	$8-6.\left\{5.(6-3).\left[-3.(5-2)+2\right]-1\right\}+7$
$\left\{-4.\left[5-8-9-\left(2-4+5\right)+3.(8-7-6)-1+3\right]-2\right\}$	$-\left\{5.3.\left[4-2+1-3.(-5-8-9-3-2)+1\right]\right\}$

Semana N° 01	Clase N° 02	Tema N° 05: Múltiplos y Divisores

Contenido General: el facilitador definirá y explicará los conceptos de múltiplos y divisores de un número y la obtención de los mismos.

Contenidos Específicos:

- Múltiplos de un Número
- Divisores de un Número

MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO: Se llaman múltiplos de un número a todos los números que resultan de la multiplicación de sí mismo con cada uno de los números naturales.

Ejemplo: $7, 14, 49, 63, \ldots$ son múltiplos de 7, porque

$7 = 7 \,.\, 1$, $14 = 7 \,.\, 2$, $49 = 7 \,.\, 7$

Son múltiplos del número 2 el $4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22$ y muchos más, tanto así que los múltiplos son infinitos como son infinitos los números naturales.

Actividad 1: Completa los espacios que están vacíos en las series siguientes:

a) 3, 6, 9, 12, _____, 18, 21, _____, _____
b) ___, 10, 15, 20, 25, ____, 35, _____
c) 7, 14, 21, ____, 35, _____, _____
d) 12, 24, _____, 48, _____, ______
e) _____, 38, 57, ______, ______

Escribe los diez primeros múltiplos de 6: _______________________________
Escribe los primeros diez múltiplos de 9: _______________________________
Escribe los cinco primeros múltiplos de 11: _____________________________
Escribe los siete primeros múltiplos de 5:_______________________________
Escribe los tres primeros múltiplos de 37:_______________________________

DIVISORES DE UN NÚMERO: En el almacén, tengo cajas de todos los tamaños ¿De qué forma puedo empaquetar 12 latas de refresco en cajas iguales sin que me sobre ninguna? Puedo agrupar las doce latas ¿de cuántas formas diferentes?:

Latas		Cajas	Formas diferentes de empaquetar
12	$12 \div 1 = 12$	12	1 caja de 12 unidades
12	$12 \div 2 = 6$	6	2 cajas de 6 unidades
12	$12 \div 3 = 4$	4	3 cajas de 4 unidades
12	$12 \div 4 = 3$	3	4 cajas de 3 unidades
12	$12 \div 6 = 2$	2	6 cajas de 2 unidades
12	$12 \div 12 = 1$	1	12 cajas de 1 unidad

Los divisores de un número son los que dividen a éste en forma exacta. De esta manera, el uno es divisor de todos los números, todo número es divisor de sí mismo. Y para determinar los divisores de un número, se buscan todos los números que lo dividen en forma exacta, es decir, que el residuo debe ser cero.

Partes de la División
Dividendo Divisor **32** | **9** **5** **3** Residuo Cociente

- Se dice que una división es exacta cuando el residuo es cero y que es inexacta cuando el residuo es diferente de 0.
- Es bueno hacer notar que el residuo siempre tiene que ser menor que el divisor.

Número	Divisores
10	1,2,5,10
18	1,2,3,6,9,18
30	1,2,3,5,6,10,30
16	1,2,4,8,16
4	1,2,4
6	1,2,3,6

Ejemplos:

Completar el siguiente cuadro:

Números	Divisores
22	
42	
150	
52	
20	
28	

Semana N° 01	Clase N° 02	Tema N° 06: Números Primos

Contenido General: El facilitador debe dar una breve definición de los números primos y ejemplos de ellos.

Definición: Los números primos son aquellos números naturales diferentes de uno (1) y de cero (0) que tienen la propiedad de poseer únicamente dos divisores: el mismo número y el 1.

Los primeros 25 números primos

Son

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97…

El conjunto de los números primos es infinito.

Nota: Puedes consultar sobre la criba de Eratóstenes, la cual es un algoritmo que permite hallar todos los números primos menores que un número natural dado.

Si quieres profundizar un poco más tus conocimientos acerca de los números primos, puedes consultar la siguiente página:

http://neoparaiso.com/logo/criba-eratostenes.html

Semana N° 01	Clase N° 02	Tema N° 07: Mínimo Común Múltiplo (m.c.m.)

Contenido General: el facilitador explicará por medio de problemas de aplicaciones, la manera de hallar el m.c.m. y la definición del mismo.

Para reflexionar

Tres aviones salen del aeropuerto de la cuidad de Mérida en las siguientes frecuencias, el primero cada dos horas, el segundo cada seis horas y el tercero cada nueve horas. Si los tres salen el mismo día ¿en cuánto tiempo volverán a partir juntos? Y ¿cuántas veces habrán despegado cada uno antes de que vuelvan a coincidir?

Respuesta: para responder estas interrogantes únicamente tenemos que hallar el m.c.m. de los números 2, 6 y 9, el cual se puede obtener de la siguiente forma:

Descomponemos en sus factores primos los números 2, 6, 9, el cual es una aplicación que se le realiza individualmente a un número, y consiste en dividirlo reiterativamente hasta que sea posible utilizando como divisores los números primos.

2	6	9	2
1	3	9	3
	1	3	3
		1	

m.c.m. (2,6,9) = 18

La mitad de 2 es 1, la mitad de 6 es 3, y como 9 no tiene mitad, este número se repite

Luego, como 3 y 9 no son divisibles por 2, cambiamos de divisor primo.
Así, la tercera de 3 es 1 y la tercera de 9 es 3.

Y por último, la tercera de 3 que es 1.

Finalmente, el m.c.m. es la multiplicación de todos los factores primos 2.3.3 = 18. Así, 18 es el mínimo común múltiplo de 2, 6 y 9.

Con esto tenemos que saliendo a la vez, se encontraran de nuevo al cabo de 18 horas.

Para saber cuantas veces ha despegado cada uno antes de encontrarse, solo tenemos que dividir 18 entre la frecuencia de cada avión y restarle uno al resultado (esto ultimo dependiendo si cuentas el momento en que se encuentran como despegue o no).

El **Mínimo común múltiplo (m.c.m)** de o más números es el menor número natural (distinto de cero) que es múltiplo de todos ellos.

Por ejemplo si queremos encontrar el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de 12, 18 y 54, lo hacemos de la siguiente forma:

12	18	54	2
6	9	27	2
3	9	27	3
1	3	9	3
	1	3	3
		1	

m.c.m. (12,18,54) = 108

Ejercicios

Completar la siguiente tabla:

Números	m.c.m
8, 12, 18	
12,16,18	
24, 36, 45	
10, 12	
28, 20	
8, 6, 15	

Números	m.c.m
3,8,14	
8,12,15	
10,4,6	
2,3,4,6	
9,2,6	
3,6,12	

Problemas

- Pedro fue al médico y, éste le recetó 3 medicamentos, que debían ser suministrados de la siguiente forma:

  Medicamento 1, cada cuatro horas

  Medicamento 2, cada diez horas

  Medicamento 3, cada dieciocho horas

  Calcular la hora en que Pedro se toma los 3 medicamentos simultáneamente.

- En el terminal de pasajeros de Mérida, funcionan 3 líneas que salen para Cumana en los siguientes lapsos de tiempo:

  Línea 1, cada nueve horas

  Línea 2, cada quince horas

  Línea 3, cada veinte horas

Calcular la hora en que exactamente salen los tres autobuses de las diferentes líneas al mismo tiempo.

- Un viajero va a Ciudad Bolívar cada 18 días y otro cada 24 días. Hoy han estado los dos en Ciudad Bolívar. ¿Dentro de cuántos días volverán a estar los dos a la vez en Ciudad Bolívar?

- Una sirena toca cada 450s, otra cada 250s y la tercera cada 600s. Si a las 4 de la mañana han coincidido tocando las tres, ¿A qué hora volverán a tocar otra vez juntas?

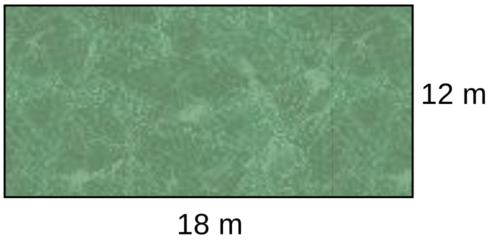
- Un viajero va a Puerto Ayacucho cada 8 días, otro cada 15 días y un tercero cada 18 días. Hoy 3 de septiembre han coincidido en Puerto Ayacucho los tres viajeros. ¿Dentro de cuántos días como mínimo volverán a coincidir en Puerto Ayacucho?

Semana N° 01	Clase N° 02	Tema N° 08: Máximo Común Divisor (M.C.D.)

Contenido General: el facilitador debe dar y explicar la definición del M.C.D. y el método de hallarlo.

Para reflexionar

Un profesor dispone de un terreno rectangular cuyas dimensiones son:



Se necesita dividirlo en parcelas cuadradas iguales para llevar a cabo una práctica de campo.
Es importante resaltar que el área de cada una de estas parcelas cuadradas debe ser la mayor posible.

- ¿Cuál es la longitud del lado de cada parcela cuadrada?

Respuesta: la longitud del lado del cuadrado de cada parcela tiene que ser un divisor de 18 y de 12, y además debe ser el mayor divisor común. Pero para ello, debemos calcular el M.C.D. de estos números.

Común divisor de dos o más números es aquel que es divisor de estos números simultáneamente

12	18	**2**
6	9	2
3	9	**3**
1	3	3
	1	

M.C.D. (12, 18) = 6

2 divide al 12 y 2 también divide al 18, por lo tanto, 2 es un común divisor

2 divide al 6 pero 2 no divide al 9, por lo tanto, no lo marcamos

3 divide al 3 y 3 también divide al 9, por lo tanto, 3 es otro común divisor

3 divide al 3 pero 3 no divide al 1, por lo tanto, no se marca

Para hallar el M.C.D. multiplicamos los números marcados, 2.**3** **= 6**
Por lo tanto, 6 es el Máximo Común Divisor de los números 12 y 18.

De esta manera, podemos deducir que la longitud del lado de cada parcela cuadrada debe ser de 6 m.

El **Máximo Común Divisor (M.C.D.)** de o más números es el mayor número natural que los divide a todos exactamente

Por ejemplo si queremos encontrar el Máximo Común Divisor (M.C.D.) de 16, 48 y 40, lo hacemos de la siguiente forma:

16	48	40	2
8	24	20	2
4	12	10	2
2	6	5	2
1	3	5	3
	1	5	5
		1	

m.c.m. (16,48,40) = 8

Ejercicios

Completar la siguiente tabla:

Números	M.C.D.
12, 8	
15, 10	
20, 12	
24, 36	
30, 40	
18, 24	

Números	M.C.D.
16, 24, 40	
18, 27, 36	
24, 36, 72	
180, 252, 594	
315, 945	
280, 840	

Problemas

- Se quiere embaldosar una cocina de 1620 cm de largo por 980 cm de ancho con baldosas cuadradas lo más grandes posibles y enteras. ¿Cual será la longitud del lado de cada baldosa?

- Vanesa está construyendo una maqueta y dispone de tres listones de 180, 250 y 300 cm de largo, respectivamente. Para hacer la base de una casa desea cortar los tres listones en trozos de igual tamaño, sin que sobre nada. ¿Cuál debe ser la longitud de cada trocito para que el número de cortes sea el menos posible? ¿Cuántos trozos de ese tamaño saldrán de cada listón?

- En un salón de clase hay 16 niños y 28 niñas; se deben formar grupos para realizar un trabajo. Todos los grupos deben tener el mismo número de estudiantes y estar formados por sólo niños ó sólo niñas. ¿Cuál es el mayor número de estudiantes que puede haber en cada grupo?

- Tenemos una plancha de corcho de forma rectangular que mide 96cm de largo y 72cm de ancho. Se quiere cortar en trozos cuadrados de la mayor superficie posible. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados? ¿Cuántos cuadrados se pueden obtener?

- Luis quiere cercar una parcela rectangular que mide 52m de largo por 40m de ancho, colocando estacas a igual distancia una de otra. ¿Cuál será la mayor distancia, en metros, entre las estacas?

Semana N° 01	Clase N° 03	Tema N° 09: Fracciones y Operaciones con Fracciones

Contenido General: el facilitador debe realizar una breve introducción teórica necesaria para la resolución de problemas relacionados con las operaciones de números racionales.

Contenidos Específicos:

- Clasificación de las Fracciones
- Adición de números racionales
- Sustracción de números racionales
- Multiplicación de números racionales
- División de números racionales

En el lenguaje común se usa la idea de fracción constantemente, por ejemplo, cuando se dice:

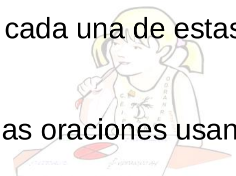
"Para hacer la torta de esta receta, necesito TRES CUARTOS de taza de leche"

"Tengo sólo MEDIA hora para resolver este examen"

"La TERCERA parte de los estudiantes aprobó con 20 el examen de Matemática"

Para reflexionar

¿Sabes exactamente lo que cada una de estas expresiones significa?



¿Podrías escribir esas mismas oraciones usando fracciones?

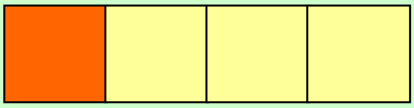
Una fracción en el lenguaje común significa una porción o parte de un todo. En Matemática se usa también el término fracción para nombrar aquellos números que son escritos de la forma $\frac{a}{b}$, con a y b números enteros y $b \neq 0$, los cuales ya conocemos como números racionales **Q**.

Por ejemplo: el número racional $\frac{2}{3}$ está escrito en forma de fracción, y aquí, como en toda fracción distinguimos al numerador, que es el número de arriba y en este caso es el 2, del denominador, el número de abajo que en este ejemplo es el 3.

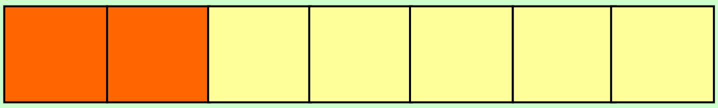
El denominador indica cuál es el número de partes en que se ha dividido la unidad, y el numerador indica cuántas partes se toman.

Por ejemplo:

En la fracción $\frac{1}{4}$, el denominador es el número 4 e indica en cuántos pedazos iguales se divide la unidad, y el número 1 es el numerador, que nos indica cuántos de estos pedazos constituyen dicha fracción.



En la fracción $\frac{2}{7}$, se divide la unidad en 7 partes iguales, y se toman 2 de esas partes.



A continuación, se darán a conocer los diferentes tipos de fracciones existentes según su clasificación:

CLASIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES:

- Según la relación entre el denominador y numerador:

- **Fracción Propia:** cuando el denominador es mayor que el numerador.

  Ejemplo: $\frac{3}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}$

- **Fracción Impropia:** cuando el denominador es menor que el numerador.

  Ejemplo: $\frac{13}{6}, \frac{18}{8}, \frac{9}{2}$

- Según la relación entre los denominadores:

- **Fracción Homogénea:** fracciones que tienen el mismo denominador.

  Ejemplo: $\frac{7}{4}$ y $\frac{3}{4}$

- **Fracción Heterogénea:** fracciones que tienen diferentes denominadores.

- Según la relación entre el numerador y el denominador:

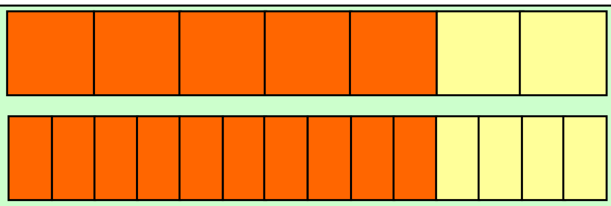
- **Fracción Reducible:** cuando el numerador y el denominador no son primos entre sí, y se puede simplificar.

- **Fracción Irreducible:** cuando el numerador y el denominador son primos entre sí, y no se puede simplificar.
    - Otras clasificaciones:
- **Fracción Unitaria:** fracción común de numerador 1.
- **Fracción Entera:** fracción que representa al entero $\frac{3}{3}=1$, $\frac{4}{4}=1$
- **Fracción Mixta:** suma de un entero y una fracción propia.

Ahora, se explicará con detalles una clasificación de las fracciones que ocupa gran relevancia en esta unidad, la cual se conoce como:

- **Fracciones Equivalentes:** dos fracciones se llaman equivalentes cuando ambas representan la misma cantidad, como se verá en los siguientes ejemplos:

Las fracciones $\frac{5}{7}$, $\frac{10}{14}$ se representan gráficamente



$\frac{5}{7}$ y $\frac{10}{14}$ son, entonces fracciones equivalentes, pues, como se ve en el dibujo, representan la misma cantidad y por eso, se escribe: $\frac{5}{7}=\frac{10}{14}$

Por otro lado, si el denominador de una fracción se multiplica por un determinado número, como por ejemplo la fracción $\frac{5}{7}$, al cual le multiplicamos por 2 al denominador, el numerador debe multiplicarse también por 2, para que las dos fracciones sean equivalentes:

$$\frac{5}{7}=\frac{5\,.\,2}{7\,.\,2}=\frac{10}{14}$$

Dos fracciones se llaman equivalentes cuando ambas representan la misma cantidad,

es decir $\frac{a}{b}$ es equivalente a $\frac{c}{d}$ si:

$$a\,.\,d=b\,.\,c$$

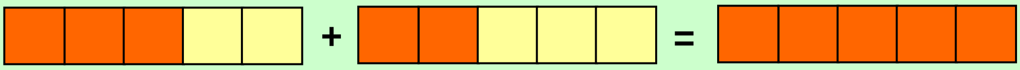
Para reflexionar

1. ¿Podrías decir cuántas fracciones equivalentes a $\frac{3}{4}$ existen?
2. ¿Qué variación experimenta una fracción si se multiplica por 5 el numerador y se divide por 5 el denominador?

OPERACIONES CON FRACCIONES

SUMA DE FRACCIONES

- **Suma de Fracciones Homogéneas:**



$\frac{3}{5}$ + $\frac{2}{5}$ = $\frac{5}{5}$

Así, $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3+2}{5}=\frac{5}{5}=1$

En general, $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ con $c \neq 0$

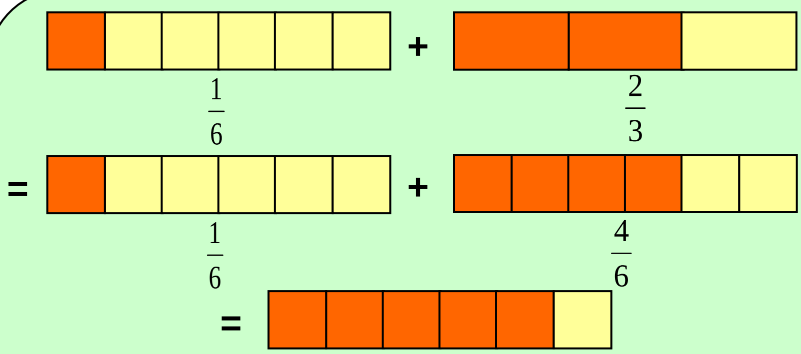
Para reflexionar

1. Los ingresos de una familia son 1500 Bsf. Mensuales. Sus gastos fijos son: $\frac{8}{50}$ Para el pago del teléfono y $\frac{17}{50}$ para el pago de luz y agua

   ¿Qué fracción de los ingresos suponen los gastos fijos?

- **Suma de Fracciones Heterogéneas:**

En este caso vamos a utilizar los conocimientos adquiridos anteriormente sobre fracciones equivalentes, por ejemplo:



$\frac{1}{6}$ + $\frac{2}{3}$

= $\frac{1}{6}$ + $\frac{4}{6}$

= $\frac{5}{6}$

Así, $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}$

$=\frac{1}{6}+\frac{2\,.\,2}{3\,.\,2}$

$=\frac{1}{6}+\frac{4}{6}$

$=\frac{1+4}{6}$

$=\frac{5}{6}$

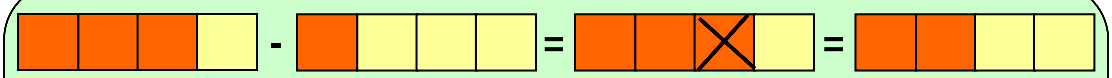
Siempre es importante convertir las fracciones en fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador para realizar el proceso análogo a suma de fracciones homogéneas.

Para reflexionar

1. Se ha consumido los $\frac{7}{8}$ de una botella de aceite. Para que se pueda llenar de nuevo se le debe reponer $\frac{3}{5}$ de sus partes. Calcula la capacidad de la botella de aceite.
2. Una persona sale de compras. Gasta $\frac{3}{7}$ de su dinero en el supermercado; después $\frac{1}{2}$ de lo que le queda en una tienda de regalos y, finalmente, $\frac{5}{14}$ de lo restante en una librería. Exprese en fracción ¿Cuánto dinero en total ha gastado esta persona?
3. Si a la fracción $\frac{5}{8}$ le aumentamos en 4, su resultado es ____________

<u>RESTA DE FRACCIONES:</u>

- **Resta de Fracciones Homogéneas:**



$\frac{3}{4}$ - $\frac{1}{4}$ = $\frac{3-1}{4}$ = $\frac{2}{4}$

Así, $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

En general,

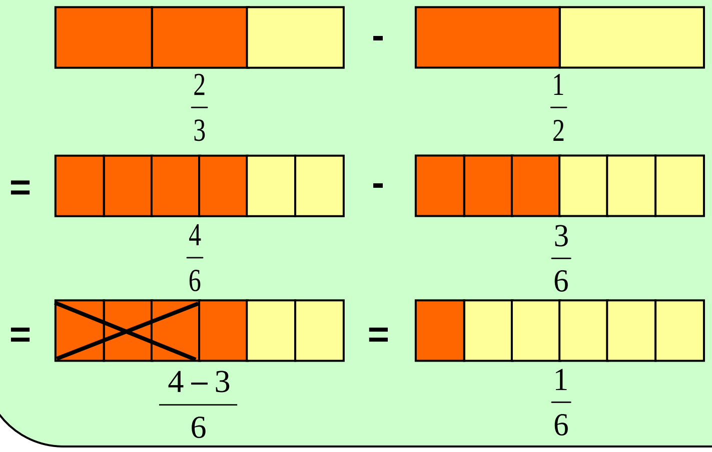
$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$ con $c \neq 0$

Para reflexionar

1. Un depósito de agua contiene $\frac{9}{15}$ de de su capacidad. Si se consumen $\frac{4}{15}$ de ella.
   ¿Cuántos litros de agua quedan?
2. De una pieza de tela de $\frac{8}{5}$ metros se cortan $\frac{2}{5}$.
   ¿Cuántos metros mide el trozo restante?

- **Resta de Fracciones Heterogéneas:**

Análogamente al caso de la suma de fracciones heterogéneas, vamos a utilizar los conocimientos adquiridos sobre fracciones equivalentes, de la siguiente manera:



Así, $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$

$= \frac{2.2}{3.2}-\frac{1.3}{2.3}$

$= \frac{4}{6}-\frac{3}{6}$

$= \frac{4-3}{6}$

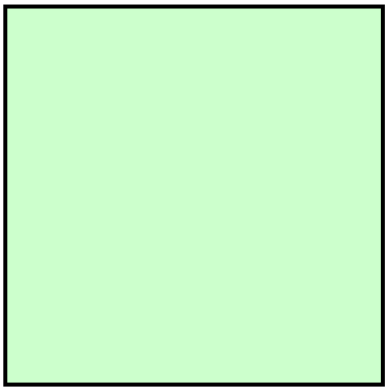
$= \frac{1}{6}$

Para reflexionar

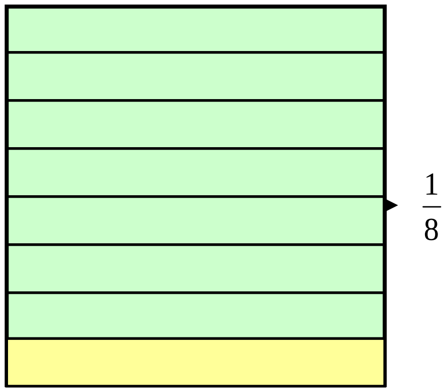
1. Entre tres hermanos deben repartirse Bs. 120.000 el primero se lleva $\frac{7}{15}$ del total, el segundo $\frac{5}{12}$ del total y el tercero el resto. ¿Cuánto se ha llevado el tercer hermano?
2. Un camión de basura ha recogido suficientes desechos para llenar $\frac{5}{6}$ de su capacidad. Si al descargar los materiales reciclables el camión queda con $\frac{11}{24}$ de su capacidad. ¿Qué fracción de la capacidad del camión estaba constituida por basura reciclable?

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES:

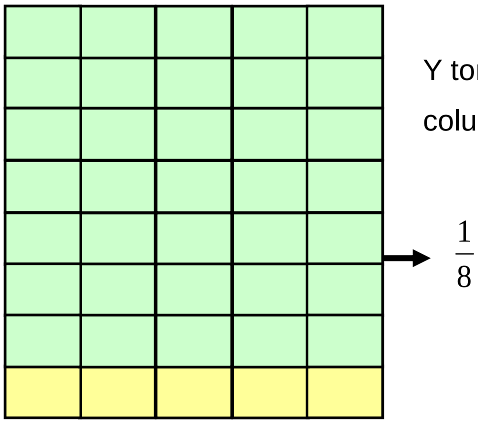
Si tenemos el siguiente cuadrado:



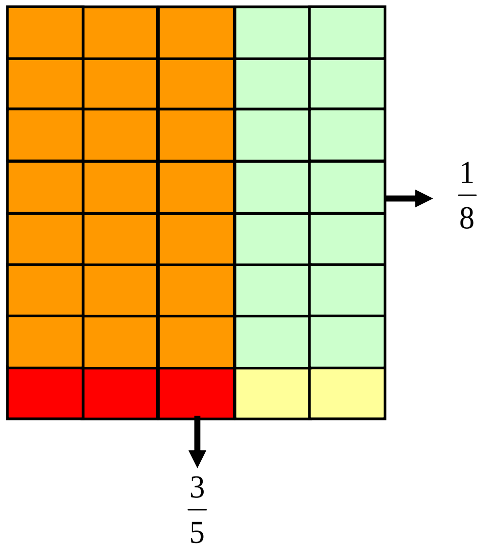
Y lo dividimos en 8 filas y tomo 1 fila de ocho



Ahora dividimos en 5 columnas



Y tomamos 3 columnas de 5



De manera que hemos formado 40 cuadros iguales, y las filas y columnas seleccionadas se han cruzado en tres de los cuarenta $\frac{3}{40}$

Por lo tanto, $\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 5} = \frac{3}{40}$

En general, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Para reflexionar

1. ¿Cuál es el área de un terreno de forma rectangular que mide $\frac{7}{6}$ m de ancho y $\frac{4}{9}$ m de largo?

<u>DIVISIÓN DE FRACCIONES:</u>

Existen varias formas para dividir fracciones entre ellas podemos estudiar las siguientes:

- **Forma 1:** *Multiplicar de forma cruzada:*

Multiplicar numerador por denominador y denominador por numerador.

Ejemplo: $\frac{2}{5} \div \frac{3}{8} = \frac{2 \,.\, 8}{5 \,.\, 3} = \frac{16}{15}$

- **Forma 2:** *Invertir fracciones:*

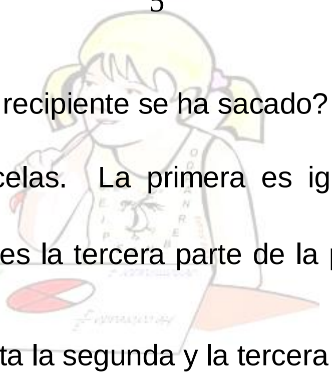
Invertir la segunda fracción y multiplicar directamente. Es decir, numerador por numerador y denominador por denominador.

Ejemplo: $\frac{2}{5} \div \frac{3}{8} = \frac{2}{5} \,.\, \frac{8}{3} = \frac{2 \,.\, 8}{5 \,.\, 3} = \frac{16}{15}$

- **Forma 3:** *Representar como fracción de fracciones:*

Ejemplo: $\frac{2}{5} \div \frac{3}{8} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}} = \frac{2 \,.\, 8}{5 \,.\, 3} = \frac{16}{15}$

Para reflexionar



1. Un recipiente está lleno de agua hasta los $\frac{4}{5}$ de su capacidad. Se saca la mitad del agua que contiene.
   ¿Qué fracción de la capacidad del recipiente se ha sacado?
2. Una finca se divide en tres parcelas. La primera es igual a los $\frac{4}{7}$ de la superficie de la finca, la segunda es la tercera parte de la primera y la tercera es la cuarta parte de la segunda.
   ¿Qué fracción de la finca representa la segunda y la tercera parcela?

Semana N° 01	Clase N° 04	Tema N° 10: Potenciación en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, y Propiedades

Contenido General: El facilitador explicará brevemente la definición de potenciación y los elementos que la componen, así como también la resolución de ejercicios aplicando las propiedades.

Contenidos Específicos:

- Definición de Potenciación
- Elementos de una Potencia
- Propiedades
- Ejercicios que impliquen el uso de las propiedades de la Potenciación

Pensemos juntos ¿se puede doblar 8 veces una hoja de papel?, primero una vez, después otra y otra…

Anotemos en una tabla la situación anterior:

	N° de veces que se dobla	capas que se obtienen
Si doblamos una vez, tenemos 2 capas	1	2
Otra vez	2	2.2
Y otra vez	3	2.2.2
	4	2.2.2.2
	…	…
	n	2.2…2 (n-veces)

Este tipo de operación que multiplica varias veces el mismo factor, se llama **Potenciación**.

Para este ejemplo simbolizamos $2\ ,\ 2^2\ ,\ 2^3\ ,\ 2^4\ ,\ ...\ ,\ 2^n$, donde 2 se le llama la base y a n se le llama exponente.

Potenciación: es una forma abreviada de expresar una multiplicación en la que todos los factores son iguales.

Se denota de forma general como a^n, y se lee "a elevado a la n", donde la potencia de un número es el resultado de tomarlo como factor n-veces; y, se indica por:

$$a^n = \underbrace{a\,.\,a\,...\,a}_{n-veces}$$, donde a^n es la enésima potencia de a

Exponente

Base $\leftarrow$ $a^n = b \rightarrow$ Resultado

Ejercicios

Completa la siguiente tabla:

a	b	a^2	b^2	a^3	b^3
3	4				
-3	-4				
-5	5				

Para reflexionar

1. ¿Qué signo tienen los resultados de bases positivas? ____________________
2. ¿Qué pasó con los signos de las bases negativas? ______________________
3. Probemos con estos ejemplos:

$(-1)^2 =$ $\qquad$ $(-1)^3 =$ $\qquad$ $(-1)^6 =$ $\qquad$ $(-1)^9 =$

De ellos concluimos que____

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN

Las únicas operaciones en que se pueden aplicar las propiedades de las potencias son la multiplicación y la división

Por ello, veamos la siguiente tabla que resume con exactitud a cada una de ellas.

Propiedades para la multiplicación:	Propiedades para la división:
Cuando multiplicamos dos potencias que tienen la misma base, $a^m . a^n = a^{m+n}$ Por ejemplo: $a^3 . a^2 = a . a . a . a . a = a^{3+2} = a^5$	Cuando dividimos dos potencias que tienen la misma base, $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ Por ejemplo: $\dfrac{a^5}{a^2} = \dfrac{a . a . a . a . a}{a . a} = a^{5-2} = a^3$

Notemos que en estas dos propiedades, las bases son iguales

Cuando hay una multiplicación de dos números elevados a un mismo exponente respectivamente,

$$a^n \,.\, b^n = (a \,.\, b)^n$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} a^3 \,.\, b^3 &= (a \,.\, a \,.\, a)\,.\,(b \,.\, b \,.\, b) \\ &= (a \,.\, b)\,.\,(a \,.\, b)\,.\,(a \,.\, b) \\ &= (a \,.\, b)^3 \end{aligned}$$

Cuando hay una división de dos números elevados a un mismo exponente respectivamente,

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Por ejemplo:

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{a \,.\, a \,.\, a}{b \,.\, b \,.\, b}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right).\left(\frac{a}{b}\right).\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

Notemos que en estas dos propiedades, los exponentes son iguales

Para reflexionar

Cu… …ia elevada a otra potencia, $(a^m)^n = a^{m \,.\, n}$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} (a^3)^2 &= (a \,.\, a \,.\, a)\,.\,(a \,.\, a \,.\, a) \\ &= a^{3 \,.\, 2} = a^6 \end{aligned}$$

Estudiaremos ahora, las propiedades de potencias con exponentes característicos

Potencia con exponente cero (0):

Cualquier número diferente de cero (0) elevado al exponente cero (0), es igual a uno (1).

Ya que; $1 = \dfrac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$

Así, $a^0 = 1 \quad , \; a \neq 0$

Potencia con exponente uno (1):

Cualquier número diferente de cero (0) elevado al exponente uno (1), es igual a sí mismo.

Así, $a^1 = a$

Potencia con exponente negativo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

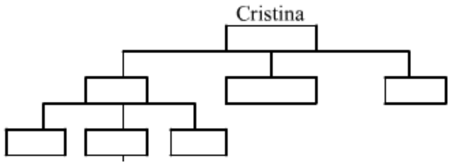
Potencia de un cociente con exponente negativo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Para reflexionar

1. Joaquín dijo: “La superficie de ese cuadrado es de $16\,\mathrm{m}^2$; entonces, su lado puede medir $4\,\mathrm{m}$ o $-4\,\mathrm{m}$” ¿te parece correcta esta afirmación?
2. Cristina recibió un correo electrónico que decía: “Cadena de la buena suerte. Reenvía este correo a tres personas y pronto recibirás una sorpresa”. En realidad Cristina no lo creyó, pero por si las dudas, envío sus tres correos.

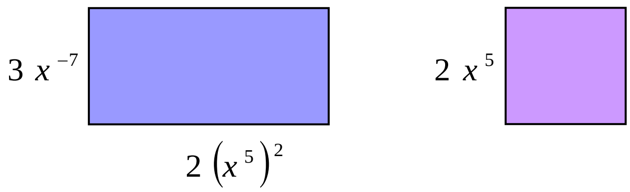
   Si nadie interrumpió la cadena, ¿Cuántas personas enviaron este mensaje después de ella?



Día	Nº de mails
0	1
1	3
2	9
3	…….
n	……..

¿Cuál es la base en este problema?

3. Encuentra la expresión más sencilla para el área del siguiente rectángulo y el cuadrado:



4. ¿Será cierto que $-3^{2} = (-3)^{2}$?

Ejercicios

1. Simplificar las siguientes propiedades usando las propiedades de la potenciación:

- $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{2} \div \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1} =$
- $\dfrac{3^{5}\,.\,3^{-7}}{3^{-2}} =$
- $\left(2^{2}\,.\,2^{-3}\right)^{-4} =$
- $\dfrac{2^{4}\,.\,4^{-2}}{8^{2}} =$
- $\dfrac{2^{5}\,.\,4^{2}\,.\,3^{2}}{2^{3}\,.\,9^{-1}} =$

Semana N° 02	Clase N° 04	Tema N° 11: Expresiones Algebraicas: monomio, binomio, polinomio.

Contenido General: Se explicará las definiciones respectivas de Monomio, Binomio, Trinomio y Polinomio junto con ejemplos que ilustren las diferencias entre ellos.

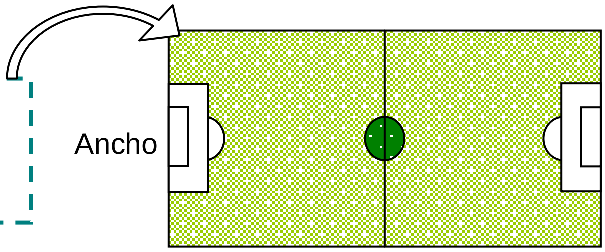
Contenidos Específicos:

- Definición de expresiones algebraicas
- Definición de Monomio, Binomio, Trinomio y Polinomio
- Operaciones (suma, resta y multiplicación) de Polinomios

Observemos la siguiente expresión:

* El largo de un campo de futbol es el doble del ancho más 10 metros

Ancho



Largo

Esta información podría expresarse de otra forma:

Llamemos x al ancho del campo

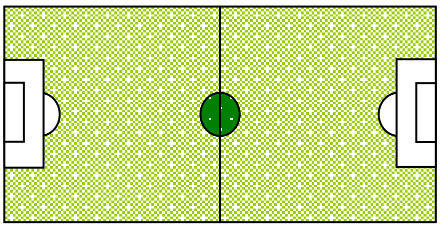
Así, el doble será $2.x$

Y el doble más 10 m: $2.x + 10$

Por tanto, $2.x + 10$ expresa el largo del campo de futbol

De esta manera, las dimensiones de nuestro campo expresadas en forma algebraica, son:

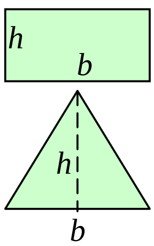
x



$2x + 10$

El lenguaje algebraico utiliza letras, números y signos para expresar información.

Las fórmulas que se utilizan en Geometría y diversas áreas son expresiones que contienen letras, o números y letras, como por ejemplo:



Área de un rectángulo: $b.h$

Área del triángulo: $\frac{b.h}{2}$

Una **expresión algebraica** es una combinación de números y letras unidos por los signos de las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación, división y potenciación.

Si Observamos la siguiente expresión algebraica: $a\,x^{n}$ nos daremos cuenta que está compuesta por tres elementos, los cuales son:

Grado o Exponente

$$a\,x^{n}$$

Coeficiente

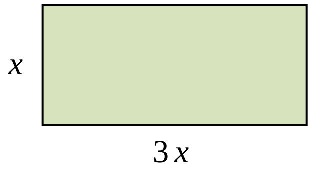
Variable

Es importante conocer la forma de expresar mediante lenguaje algebraico algunas expresiones muy comunes en varios problemas planteados en la vida diaria o cualquier otra situación como las siguientes:

Un número cualquiera	x
Un número aumentado en 3 unidades	$x+3$
Un número disminuido en 2 unidades	$x-2$
El doble; triple… de un x número	$2x,\ 3x$
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$
La tercera parte de un número	$\frac{x}{3}$
Un número par	$2x$
Un número impar	$2x+1$ *ó* $2x-1$
Dos números consecutivos	$x;\ (x+1)$
Dos números pares consecutivos	$2x;\ (2x+2)$
Dos números impares consecutivos	$(2x+1);\ (2x+3)$
La suma de dos números consecutivos	$x+\ (x+1)$
La suma de dos números pares consecutivos	$2x+\ (2x+2)$
La suma de dos números impares consecutivos	$(2x+1)+\ (2x+3)$
El cuádruple de la suma de dos números	$4(x+y)$
El cuadrado de una suma de dos números	$(x+y)^{2}$

Para reflexionar

* Sabiendo que la base de un rectángulo mide el triple de su altura, hallemos la expresión algebraica que corresponde a su área.



El área del rectángulo está determinada por la siguiente fórmula: $A = b.h$ (donde b es la base y h es la altura)

Sustituyendo los valores se tiene que:

$$A = 3x\ .\ x$$

$$A = 3x^2$$

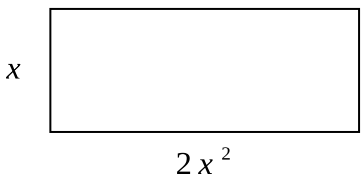
Esta expresión algebraica obtenida, es conocida con el término de **Monomio**.

Monomio: Es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las variables son el producto y la potencia de exponente natural.

Ejemplos: $\frac{1}{7}w^3x \qquad 5x^3y^2w \qquad \frac{3}{2}y^5t^2w$

Se llama término a toda expresión algebraica cuyas partes no están separadas por los signos + o -

* Sabiendo ahora que la base de un rectángulo mide dos veces el cuadrado de su altura, hallemos la expresión algebraica que corresponda a su perímetro.



Recordemos que el perímetro de una figura geométrica es la suma de sus lados.

Por ende, el perímetro de este rectángulo está expresado por:

$$P = x + x + 2x^2 + 2x^2$$

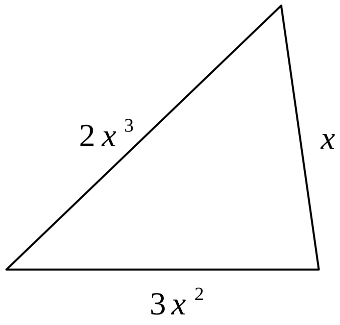
$$P = 2x + 4x^2$$

Esta expresión algebraica obtenida, es conocida con el término de **Binomio**.

Binomio: Es una expresión algebraica formada por dos términos (dos monomios) unidos por el signo de la suma o de la resta.

Ejemplos: $3w^3x - 2; \qquad \frac{1}{5}x^4y^2 + 2xw; \qquad -6t^3yx - 2t$

* Supongamos que tenemos un triángulo cuyas dimensiones son las siguientes:



Y queremos hallar la expresión algebraica que represente su perímetro.

Lo hacemos simplemente sumando todos sus lados de la siguiente forma:

$$P = 2x^3 + 3x^2 + x$$

Esta expresión algebraica obtenida, es conocida con el término de **Trinomio**.

Trinomio: Es una expresión algebraica formada por tres términos unidos por los signos de suma o resta.

Ejemplos: $-7wy + 3w^3x - 2tr$; $-\frac{2}{3}y^2t + 2xw - 5yt$; $-6t^3 + yx - 2t$

Cuando existen expresiones algebraicas con más de tres términos, a estas se les llaman ***POLINOMIOS***

Polinomio: Expresión algebraica formada por tres o más términos.

Ejemplos:

$$P(x) = y^2 - 8y - 20x + 1$$

$$Q(x) = 25w^2 + 30wz + 9z^2 + 3xy - 9$$

$$R(x) = 40 + b^2 - 13b + 5 - 4b^3 - 11a$$

El polinomio no puede tener exponentes negativos ni fraccionarios y la variable no puede estar en el denominador ni en el radicando.

Son ejemplos de no polinomios los siguientes:

$\frac{5}{x} + 3$, $\sqrt{x + 2}$,

$x^{1/3} + 15$, $3x^{-2} + 7$

También, es importante resaltar que los polinomios se denotan con letras mayúsculas, resaltando entre paréntesis la variable con la que se está trabajando.

Definición: Un polinomio real de variable x, es una expresión de la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$,donde n es un entero no negativo y los coeficientes de la variable x : a_0 , a_1 , a_2 , . . . , a_n son números reales, con $a_n \neq 0$, el coeficiente a_0 se llama término independiente y si $a_n \neq 0$, entonces decimos que el grado de $p(x)$ es n.

OPERACIONES CON MONOMIOS, BINOMIOS, TRINOMIOS Y POLINOMIOS

Las operaciones con expresiones algebraicas tienen las mismas propiedades que las operaciones con los números reales. Sin embargo, existe un procedimiento especial para realizar cada una de estas operaciones.

* La señora María decidió organizar una cena familiar, pero como su mesa de comedor es muy pequeña y rectangular con las siguientes medidas: un lado mide **a** cm y el otro mide **b** cm; decide pedirle prestada la mesa de su vecina para unirlas y de esta manera cenar todos juntos, esta mesa tiene las medidas siguientes: **a** cm un lado y **d** cm el otro lado. Calcular el área total ocupada por la nueva mesa formada.

La mesa de la señora María es de la siguiente forma:

a cm

b cm

La mesa de la vecina es de la siguiente forma:

a cm

d cm

Es claro que para calcular el área pedida, debemos colocar las mesas de tal forma que coincidan los lados de igual magnitud para facilitar las cuentas.

a cm

b cm **d** cm

Los lados de la nueva mesa formada tienen las siguientes medidas: **a** cm uno de sus lados y el otro **(b + d)** cm, y su área está determinada por:

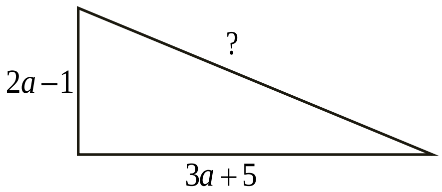
$$\mathbf{a}\ \text{cm}\ \mathbf{.}\ \mathbf{(b + d)}\ \text{cm} = \mathbf{a\ .\ b}\ \text{cm}^2 + \mathbf{a\ .\ d}\ \text{cm}^2$$

Por lo visto anteriormente, se puede deducir que uno de los lados de la mesa es un monomio y el otro es un binomio, así como también lo es el área resultante

Con este problema y su resolución aprendimos una de las operaciones de las expresiones algebraicas **"la multiplicación"**, cuyo procedimiento consistía en aplicar la propiedad distributiva

Nota: Para multiplicar monomios se debe recordar que "Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes" Por ejemplo $5x^2 \cdot 3x^4 = 15x^6$

* Determinar el lado faltante en el siguiente triangulo, sabiendo que su perímetro mide: $9a+4$



En primer lugar sumamos los lados del triángulo que si tenemos, los cuales están formados por *binomios,* sabiendo que cada término se obtiene sumando los coeficientes de los monomios de igual grado, de esta manera se puede escribir que:

$$\begin{array}{r} 3a + 5 \\ +\ 2a - 1 \\ \hline 5a + 4 \end{array}$$

Ahora, restamos la expresión resultante con el perímetro dado. Pero para restar del binomio $5a + 4$ del perímetro, es necesario cambiar el signo de sus términos y así efectuar la suma normal:

$$\begin{array}{r} 9a + 4 \\ -5a - 4 \\ \hline 4a \end{array}$$

De esta manera el lado faltante tiene como magnitud el monomio $4a$

Con este problema y su resolución aprendimos otras de las operaciones restantes de las expresiones algebraicas **"la suma y la resta"**, cuyo procedimiento consistía en agrupar términos semejantes y sumarlos o restarlos según sea el caso

Suma o Resta de Monomios

Para sumar o restar dos monomios tienen que ser semejantes. La suma o resta es otro monomio semejante a ellos que tiene por coeficiente la suma o diferencia, según el caso, de los coeficientes. Cuando los monomios no son semejantes la suma queda indicada.

Resta de Polinomios:

Una resta de dos polinomios no es más que la suma de un polinomio más el opuesto del otro. Tal como ocurre con los números enteros, el opuesto de un polinomio es aquel que, sumado a él, da cero. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 + 2x - 1 \\ -p(x) &= -x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$p(x) + (-p(x)) = x^2 + 2x - 1 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

Pues el polinomio opuesto a $p(x)$ es $-p(x)$ y se obtiene sencillamente cambiando de signo a todos los monomios de $p(x)$.

Ejercicios

1. Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^4 - 2x^2 - 6x - 1$$

$$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 4$$

$$R(x) = 2x^4 - 2x - 2$$

Calcular:

$$P(x) + Q(x) - R(x) =$$
$$P(x) + 2Q(x) - R(x) =$$
$$Q(x) + R(x) - P(x) =$$

2. Siendo $A(x) = \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 2$, $B(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$,

$C(x) = 2x^3 + 3x^2$ y $D(x) = x - \frac{1}{2}$

Calcular:

a. $A(x)\,.\,B(x)$

b. $B(x)\,.\,C(x)$

c. $A(x)\,.\,\left(-D(x)\right)$

d. $2\left(A(x)-B(x)\right)-B(x)\,.\,C(x)$

e. $\left(A(x)-B(x)+C(x)\right).\,2x$

f. $A(x)\,.\,D(x)-C(x)$

3. Efectuar las siguientes multiplicaciones de polinomios:

- $7x^2\cdot(10x+3x^2-5)=$
- $(3y+5)\cdot(5x^2+7x-3)=$
- $\left(x^4-2x^2+2\right).\left(x^2-2x+3\right)=$
- $\left(3x^2-5x\right).\left(2x^3-4x^2-x+2\right)=$
- $\left(2x^2-5x+6\right).\left(3x^4-5x^3-6x^2+4x-3\right)=$

Problemas

1. Hallar la superficie de un rectángulo cuyo lado menor está determinado por la expresión $5x^3-2x^2+7$ y el lado mayor por el binomio $6x^2-1$

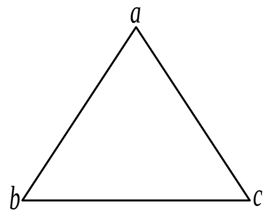
2. Calcular la superficie de un tablero de ajedrez cuyo lado está determinado por la expresión $3x^2-2$ (nota: el tablero de ajedrez es de forma cuadrada)

3. Hallar la superficie de una puerta, sabiendo que $4x^4+8x^3$ corresponde a su anchura, y $7x^4-5x^3-3x^2+6x-1$ a su altura.

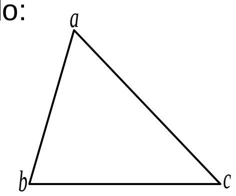
4. Un triángulo tiene por base el lado de un cuadrado cuya magnitud es la expresión $2x^3+4x^2-3$. Calcular el área del triángulo sabiendo que su altura es el doble de su base.

5. Escribe el polinomio reducido del perímetro de las siguientes figuras:

   a. Triangulo equilátero: $\overline{ab} = 2x + 7$



   b. Triángulo:

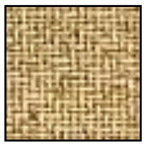


$\overline{ab} = 2x^2 - 1$

$\overline{bc} = 5x^2 - 2x + 3$

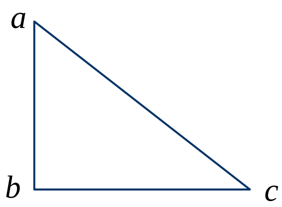
$\overline{ca} = -x + 12$

   c. Alfombra cuadrada de lado $\frac{3}{4}x^2 - 2x$



6. ¿Cuál es la expresión $S(x)$ que representa la superficie y $P(x)$ que representa el perímetro de las siguientes figuras?

   a. Triángulo Rectángulo



$\overline{ab} = 2x + 5$

$\overline{bc} = \frac{1}{2}x^2 - 4x$

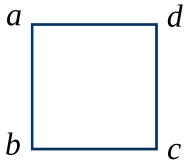
$\overline{ac} = x^2 + 5x - 2$

   b. Rectángulo

$\overline{ab} = 2x^2 - 1$

$\overline{bc} = 5x^2 - 2x + 3$

   c. Cuadrado de lado $2x^2 - 3$



Semana N° 02	Clase N° 04	Tema N° 12: Productos Notables

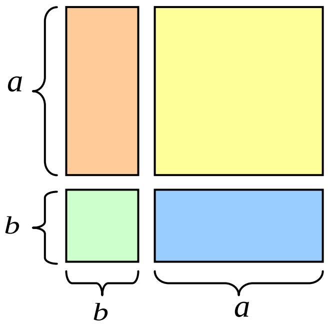
Contenido General: El facilitador dará una explicación geométrica y algebraica de los Productos Notables.

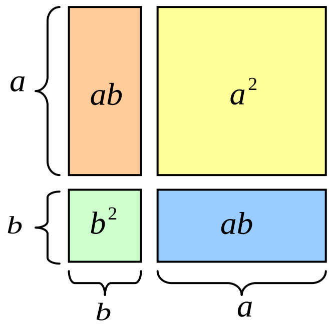
Contenidos Específicos:

- Cuadrado de una suma
- Cuadrado de una Resta
- Cubo de una suma
- Cubo de una resta
- Triángulo de Pascal ó Tartaglia

Demostración Geométrica del Cuadrado de una Suma:

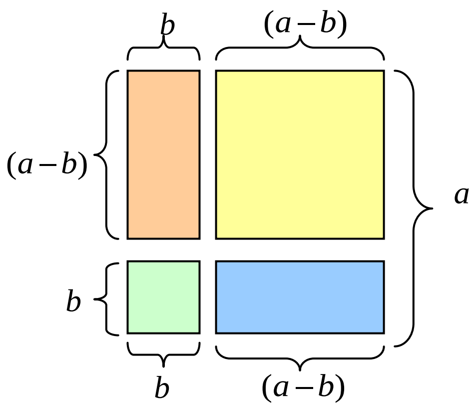
$(a+b)^2 = ?$

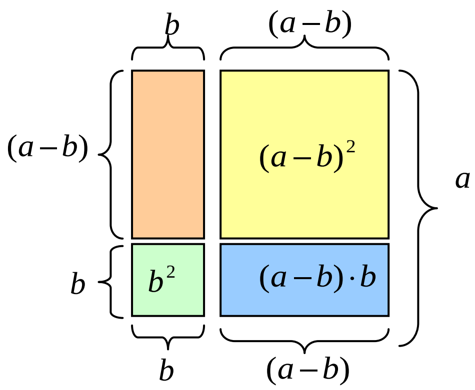




Así, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = ?$





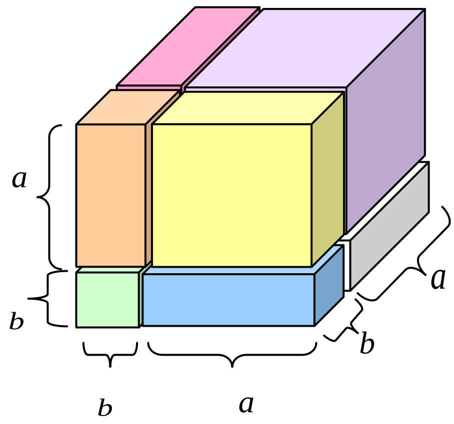
Y, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

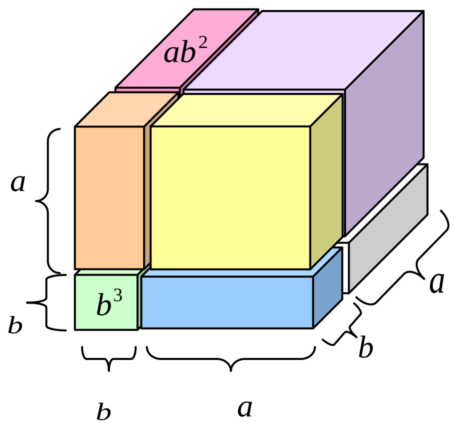
Demostración Algebraica:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b).(a+b)\\
&= a.(a+b)+b.(a+b)\\
&= a.a + a.b + b.a + b.b\\
&= a^2 + a.b + a.b + b^2\\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a-b)^2 &= (a-b).(a-b)\\
&= a.(a-b) - b.(a-b)\\
&= a.a - a.b - b.a + b.b\\
&= a^2 - a.b - a.b + b^2\\
&= a^2 - 2ab + b^2
\end{aligned}
$$

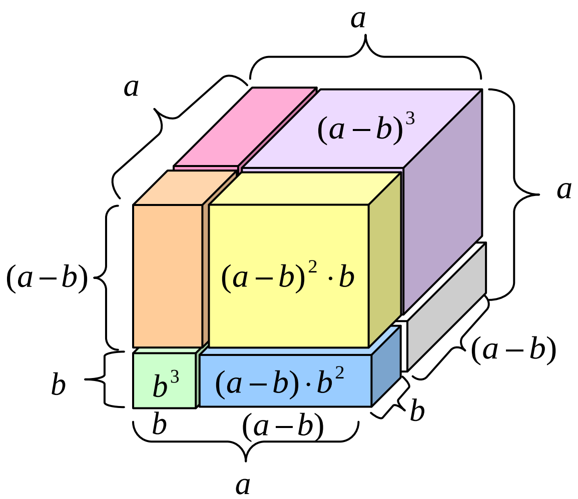
$(a+b)^3 = ?$





Así, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = ?$



Y, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

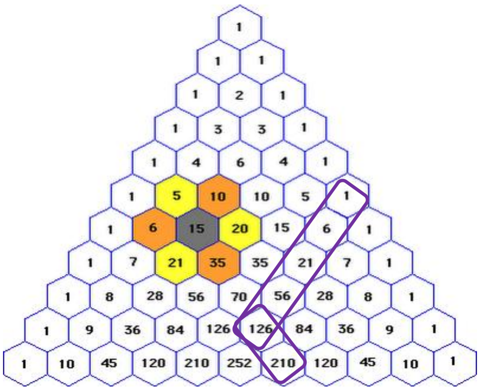
Demostración Algebraica:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b).\left[(a+b).(a+b)\right] \\
&= (a+b).\left[a.(a+b)+b.(a+b)\right] \\
&= (a+b).\left[a.a+a.b+b.a+b.b\right] \\
&= (a+b).\left[a^2+a.b+a.b+b^2\right] \\
&= (a+b).\left[a^2+2ab+b^2\right] \\
&= a.(a^2+2ab+b^2)+b.(a^2+2ab+b^2) \\
&= a.a^2+a.2ab+a.b^2+b.a^2+b.2ab+b.b^2 \\
&= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{aligned}
$$

$$(a+b)^4 = ?$$

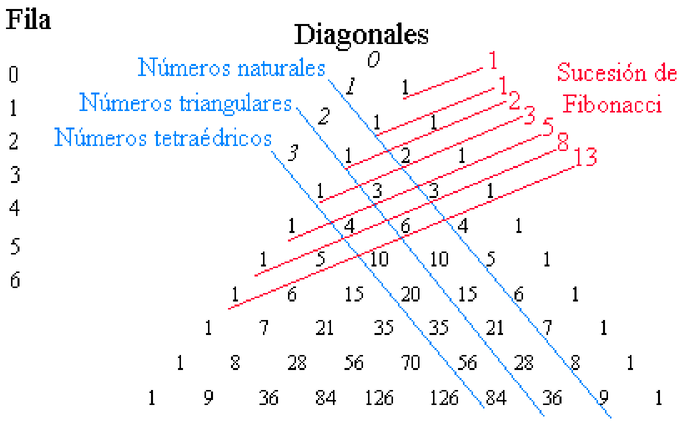
A continuación, conoceremos un triángulo muy particular que fue descubierto por el matemático Tartaglia, pero que muchos lo conocen como Triángulo de Pascal, es por ello que en este curso lo llamaremos **Triángulo de Pascal o Tartaglia**.

Algunas curiosidades del triangulo de Pascal o Tartaglia



Pétalos de Pascal: Dada una celda cualquiera (gris) alrededor de la que sea posible disponer de seis celdillas que la recubran, distinguiremos dos series de Pétalos alternos (amarillos y naranjas), pues bien, el producto de los pétalos amarillos es igual al producto de los pétalos naranja.

El stick de hockey: Cualquier diagonal que empiece en un extremo del triángulo, y de la longitud que sea, cumple la siguiente propiedad: La suma de todos los números que la integran se encuentran justo debajo del último de ellos, en la diagonal contraria.



La primera diagonal (marcada con color azul) reproduce la secuencia de los **números naturales:** es decir el $1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,.\,.\,.$

En la segunda se pueden observar los **números triangulares**. Un número triangular es el cardinal de un conjunto de puntos que componen una disposición triangular $(1\,,\,3\,,\,6\,,\,10\,,\,15\,,\,21\,,\,.\,.\,.)$. Cabe destacar que en la sucesión de estos números triangulares, la suma de dos términos cualesquiera adyacentes es un cuadrado perfecto.

Cada fila vale 2^{n-1}, siendo n el numero de fila correspondiente así la suma de los términos de la primera fila es $2^0 = 1$, la segunda $2^1 = 2$ o $1+1$, la tercera fila $2^{3-1} = 2^2 = 4$ o $1+2+1$, la cuarta fila $2^{4-1} = 8$ ó $1+3+3+1$. Y así sucesivamente.

Otra propiedad interesante es que todos **los números de la fila** n **son divisibles por** n (menos el 1, claro) si, y solamente si, n es primo. Así por ejemplo en la fila $(1\;\;7\;\;21\;\;35\;\;35\;\;21\;7\;\;1)$, los números 7 , 21 y 35 son divisibles por 7 .

El Triángulo de Pascal o Tartaglia, también se puede generalizar por medio de una fórmula llamada **Binomio de Newton**, el cual se puede definir de la siguiente forma:

Nota: Es importante aclarar los términos de factorial y combinatoria, antes de estudiar el binomio de Newton**.**

Factorial: Sea n un entero no negativo. Se define n **factorial** ó factorial de n, al producto de todos los naturales desde 1 hasta n:

$$n\,! \;=\; 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

$$1\,! \;=\; 0\,! \;=\; 1$$

Ejemplo:

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$

Combinatorio de un número: Sean n y k dos enteros tales que $0 \le k \le n$. Se define el número combinatorio mediante:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Por ejemplo;

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3!\,5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

Binomio de Newton $(x+y)^n$: es un resultado que proporciona el desarrollo de la potencia de una suma. Este teorema establece: el coeficiente $x^n y^{n-k}$ en el desarrollo de $(x+y)^n$ es $\binom{n}{k}$ donde $\binom{n}{k}$ recibe el nombre de coeficiente binomial y representa el número de formas de escoger k elementos a partir de un conjunto con n elementos. Usualmente el teorema del binomio se expresa:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n$$

Ejercicios

Resolver los siguientes productos notables:

$(4+3x)^2 =$	$(8-4x)^2 =$
$(2-x)^6 =$	$3^4 - 4 \cdot 3^3 x + 6 \cdot 3^2 x^2 - 4 \cdot 3x^3 + x^4 =$
$x^2 + 6x + 3^2 =$	$(3x-9)^3 =$
$(7x-5)^2 =$	$(7+x)^4 =$
$(2y-3)^3 =$	$(y+3)^5 =$
$5^8 + 8 \cdot 5^7 y + 28 \cdot 5^6 y^2 + 56 \cdot 5^5 y^3 + 70 \cdot 5^4 y^4 + 56 \cdot 5^3 y^5 + 28 \cdot 5^2 y^6 + 8 \cdot 5 y^7 + y^8 =$	

Semana N° 02	Clase N° 05	Tema N° 13: Radicales y Radicación

Contenido General: El facilitador debe dar una breve definición de la Radicación y explicar las operaciones y propiedades.

Contenidos Específicos:

- Definición de Radicales
- Expresión de una potencia fraccionaria como un radical
- Elementos de un radical
- Radicales semejantes
- Extracción e introducción de factores de un radical
- Operaciones con radicales
- Propiedades de la radicación

DEFINICIÓN DE RADICALES:

Si analizamos las siguientes expresiones:

$3x$, $x+2=4$, x^2+1 , $f(x)=x-1$, $\sqrt{2}$, $3\sqrt[4]{5}$

Podemos notar que tienen ciertas características propias, las cuales se pueden resaltar como:

- $3x$ y x^2+1 representan polinomios
- $x+2=4$ Representa una ecuación de primer grado
- $f(x)=x-1$ Representa una función
- Mientras que $\sqrt{2}$ y $3\sqrt[4]{5}$ representan unas nuevas estructuras matemáticas llamadas **RADICALES.**

Un radical: es una expresión matemática cuya característica principal es que presenta el símbolo $\sqrt{\ }$ y además no se pueden expresar exactamente por ningún número entero ni fraccionario.

Por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $6\sqrt[5]{7}$, $\frac{1}{4}\sqrt[5]{81}$

EXPRESIÓN DE UNA POTENCIA FRACCIONARIA COMO UN RADICAL:

Comparemos las siguientes expresiones:

$-3x^2$ y $5x^{\frac{1}{3}}$

Recordemos que un monomio es un polinomio (expresión algebraica) que consta de un sólo termino.

Ambos son monomios, pero sus exponentes son diferentes

El -3 es el coeficiente | El 5 es el coeficiente

La x es la variable | La x es la variable

El 2 es el exponente | El $\frac{1}{3}$ es el exponente

El hecho de que sus exponentes tengan características diferentes, hace que podamos introducir el siguiente concepto:

El segundo monomio $5\,x^{\frac{1}{3}}$ como tiene un exponente fraccionario, se puede escribir de la siguiente forma:

$5x^{\frac{1}{3}} = 5\sqrt[3]{x}$ Donde el símbolo $\sqrt[3]{\ }$ se lee: raíz cúbica

Así, cualquier cantidad elevada a un exponente fraccionario se puede expresar como un radical.

De modo general: Si m y n son números enteros con $n \neq 0$ y b es un número real, entonces:

$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ Es decir, $b^{\frac{Numerador}{Denominador}} = \sqrt[Denominador]{b^{Numerador}}$

ELEMENTOS DE UN RADICAL:

De manera general, Los elementos de un radical son:

$$a\sqrt[n]{b}$$

Índice

Símbolo Radical

Coeficiente

Cantidad subradical
O radicando

RADICALES SEMEJANTES:

Estudiemos el siguiente grupo de radicales:

$\sqrt{2}$, $3\sqrt[5]{2}$, $5\sqrt{2}$, $3\sqrt[3]{2}$, $-9\sqrt{2}$

Para que dos o más radicales sean semejantes, necesariamente sus índices y cantidad subradical deben ser iguales

Observemos que:

- $\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$ y $-9\sqrt{2}$ tienen diferentes coeficientes, pero los índices y la cantidad subradical son iguales.
- $3\sqrt[5]{2}$ y $3\sqrt[3]{2}$ tienen igual los coeficientes y su cantidad subradical, pero sus índices son diferentes.

Por tanto $\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$ *y* $-9\sqrt{2}$ *son radicales semejantes porque tienen el mismo índice y la misma cantidad subradical.*

EXTRACCIÓN DE FACTORES DE UN RADICAL:

Si tenemos la siguiente expresión:

$\sqrt[3]{a^2.b^6}$ Y queremos extraer uno de los factores de la cantidad subradical, podemos darnos cuenta que $b^{\frac{6}{3}} = b^2$.

Para extraer factores de un radical, se divide el exponente entre el índice y se saca el factor elevado al cociente de la división quedando dentro del radical factor elevado al resto de la división

Por tanto, al extraer b^6 del radical se obtiene que:

$$\sqrt[3]{a^2.b^6} = b^2.\sqrt[3]{a^2}$$

INTRODUCCIÓN DE FACTORES DE UN RADICAL:

Sea la expresión algebraica:

$$a^2.\sqrt[4]{b^5} = \sqrt[4]{b^5.a^{2.4}} = \sqrt[4]{b^5.a^8}$$

Para introducir factores dentro de un radical, se hace el proceso inverso al anterior. En este caso se multiplica el exponente del factor por el índice del radical

OPERACIONES CON RADICALES:

- Para sumar y restar radicales, es necesario que estos sean semejantes; es decir, que la única diferencia que puede haber entre ellos sean los coeficientes que lo acompañan.

Ejemplos:

1. $7\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2} = (7+5).\sqrt{3} - 3\sqrt{2} = 12\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

2. $8\sqrt{20} + 3\sqrt{45} - \sqrt{5}$ estos radicales no son semejantes. Pero vamos a extraer de cada radical todos los factores que se puedan.

Así,
$$8\sqrt{20} + 3\sqrt{45} - \sqrt{5} = 8\sqrt{2^2.5} + 3\sqrt{3^2.5} - \sqrt{5}$$
$$= 16\sqrt{5} + 9\sqrt{5} - \sqrt{5}$$

Ahora, como sí son semejantes, podemos sumarlos; De esta manera:

$$16\sqrt{5} + 9\sqrt{5} - \sqrt{5} = 24\sqrt{5}$$

PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN:

Para estudiar las propiedades de la radicación es necesario tener nociones acerca de las propiedades de la potenciación (se recomienda al lector repasar las propiedades de la potenciación estudiadas en el tema 10 de este módulo), en este caso también se cumplen estas propiedades solo para las operaciones de multiplicación y división de radicales.

Por ello, veamos la siguiente tabla que resume con exactitud cada una de ellas:

Propiedades para la multiplicación:	**Propiedades para la división:**
Cuando multiplicamos dos radicales que tienen el mismo índice, se tiene que: $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} . b^{\frac{1}{n}} = (a.b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a.b}$	Cuando dividimos dos radicales que tienen el mismo índice, se tiene que: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Notemos que en estas dos propiedades, los índices son iguales

Cuando hay una raíz dentro de otra raíz, se cumple que:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$= a^{\frac{1}{m.n}} = \sqrt[m.n]{a}$$

Ejercicios

Resolver las siguientes sumas de radicales:

1. $\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75}$
2. $\sqrt[4]{625} + \sqrt[4]{16} - \sqrt[4]{81}$
3. $2\sqrt{2^2 . 3} - 3\sqrt{3 . 5^2} + \sqrt{3^3}$
4. $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486}$
5. $2\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80}$

Simplificar las siguientes expresiones usando las propiedades de la radicación:

1. $\sqrt[12]{3^6} \;.\; \sqrt[12]{(3^2)^4} \;.\; \sqrt[12]{(3^3)^3}$
2. $\dfrac{\sqrt{a} \;.\; \sqrt{a^2} \;.\; \sqrt{a^3}}{\sqrt{a^4}}$
3. $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}}}$
4. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}}$
5. $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{3\sqrt{5\sqrt{3}}}}}$
6. $\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{5}}}$
7. $\sqrt{5\sqrt[6]{2\sqrt[8]{7\sqrt{3\sqrt[4]{5}}}}}$
8. $\sqrt{\dfrac{\sqrt[5]{3\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}}{\sqrt[5]{5\sqrt[6]{7}}}}$

Semana N° 02	Clase N° 05	Tema N° 14: Racionalización

Contenido General: El facilitador debe enseñar los dos casos de racionalización que se presentan en esta unidad por medio de la resolución de ejercicios.

Contenidos Específicos:

- Definición de Racionalización
- Primer caso de Racionalización cuando el denominador es un monomio
- Segundo caso cuando el denominador es un binomio y el índice de la raíz es dos (2)

RACIONALIZACIÓN: Significa encontrar una fracción igual a la que tenemos de inicio pero de forma que en el denominador no aparezcan raíces.
A continuación veamos detenidamente dos casos de racionalización.

CASO 1

Racionalizar el denominador de una fracción cuando el denominador es monomio.

Basta con multiplicar los dos términos de la fracción por el radical del mismo índice que el denominador.

Seguidamente, estudiaremos varios ejemplos de racionalización según el primer caso.

Ejemplo: Racionalizar el denominador de las siguientes expresiones

- $\dfrac{2}{\sqrt{5x}} = \dfrac{2}{\sqrt{5x}} \cdot \dfrac{\sqrt{5x}}{\sqrt{5x}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{5x}}{\left(\sqrt{5x}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{5x}}{\sqrt{5^2 x^2}} = \dfrac{2\sqrt{5x}}{5x}$

- $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25x}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{5^2 x}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{5x^2}}{\sqrt[3]{5x^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{5x^2}}{5x}$

- $\dfrac{5}{3\sqrt[3]{4a^2}} = \dfrac{5}{3\sqrt[3]{2^2 a^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{2a}} = \dfrac{5\sqrt[3]{2a}}{3\sqrt[3]{2^3 a^3}} = \dfrac{5\sqrt[3]{2a}}{6a}$

CASO 2

Racionalizar el denominador de una fracción cuando el denominador es un binomio que contiene radicales de segundo grado.

Se multiplican ambos términos de la fracción por la “conjugada” del denominador y se simplifica el resultado. La “conjugada” de $(a+b)$ es la expresión $(a-b)$ y viceversa. Luego se aplica la diferencia de cuadrados $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$

Ejemplo: Racionalizar las siguientes expresiones

- $$\frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\left(3-\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{\left(1-\sqrt{2}\right)}{1-\sqrt{2}} = \frac{3\left(1-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)}{1^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$
  $$= \frac{3-3\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2^2}}{1-\sqrt{2^2}} = \frac{5-4\sqrt{2}}{-1} = 4\sqrt{2}-5$$

- $$\frac{\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{\left(\sqrt{2}-3\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}} \cdot \frac{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{4-\sqrt{10}-6\sqrt{10}+15}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{5^2}}$$
  $$= \frac{19-7\sqrt{10}}{3}$$

CASO 3

Racionalización de binomios con índices mayores que dos

Cuando se tienen binomios con radical de índice 3, es preciso utilizar **productos notables**, en este caso la adición y sustracción de cubos, según sea el caso.

Adición de Cubos: $a^3+b^3 = (a+b).(a^2-ab+b^2)$

Sustracción de Cubos: $a^3-b^3 = (a-b).(a^2+ab+b^2)$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right).\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a\,b}+\sqrt[3]{b^2}}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b^3}\right)^3}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a\,b}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$$

Ejercicios

Racionalizar las siguientes expresiones

1.) $$\frac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$$

2.) $$\frac{3\sqrt{2}}{7\sqrt{2}-6\sqrt{3}}$$

3.) $$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{2\sqrt{a}+\sqrt{x}}$$

4.) $$\frac{\sqrt{7}+3\sqrt{11}}{5\sqrt{7}+4\sqrt{11}}$$

5.) $$\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}$$

6.) $$\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$$

7.) $$\frac{\sqrt{7x-1}+5}{3-\sqrt{7x-1}}$$

8.) $$\frac{\sqrt[3]{2x+11}-3}{\sqrt[3]{5-3x}+7}$$

Semana N° 02	Clase N° 06	Tema N° 15: Potenciación en Z y Q, y Propiedades

Contenido General: Se dará la definición y forma general de una ecuación de primer grado junto con problemas que impliquen despejes de incógnitas.

Contenidos Específicos:

- Definición de ecuaciones
- Forma General de una ecuación de primer grado
- Elementos de una ecuación

Seguramente, alguna vez, algún amigo tuyo te habrá planteado lo siguiente:

— Piensa un número.
— Súmale 15.
— Multiplica por 3 el resultado.
— A lo que obtienes, réstale 9.
— Divídelo por 3.
— Réstale 8.
— Dime ¿a qué número llegaste?
Le respondiste, por ejemplo:
— 32.

Y tu amigo instantáneamente te respondió:
— El número que pensaste fue el 28.

Pero ¿Cómo consiguió tu amigo averiguarlo tan rápido?

Para contestar esta pregunta, expresemos en lenguaje simbólico todas las operaciones que te ordenó que hicieras. Llamémosle x al número que habías pensado (valor desconocido a averiguar). Entonces:

$\dfrac{(x+15).\,3-9}{3}-8=32$ Aplicando las propiedades conocidas de las operaciones entre número reales, obtenemos: $x+4=32$

Por lo tanto, realizar todos los cálculos que te pidió tu amigo equivale a simplemente sumarle 4 al número original. De esta manera, restándole 4 a 32 es fácil descubrir cuál había sido el número que pensaste en principio.

Observemos que para resolver el problema utilizamos una igualdad en la que un valor era desconocido. Muchos problemas se resuelven de manera similar, lo que originó el estudio de las…

Ecuaciones: son relaciones de igualdad entre cantidades, algunas de ellas desconocidas que las llamamos incógnitas, relacionadas por operaciones matemáticas que se verifican para ciertos valores de dicha incógnita.

La ecuación de primer grado es de la forma: $ax + b = 0$, con $a, b \in \mathrm{R}$, a $\neq$ 0 y el exponente máximo es 1.

Donde,

Incógnita

$$ax + b = 0$$

Coeficiente

Término Independiente

Para reflexionar

1. El hermano mayor de una familia con tres hermanos tiene 4 años más que el segundo y éste 3 más que el menor. Si entre todos tienen la edad del padre que tiene 40 años ¿Qué edad tiene cada hermano?
2. El perímetro de un jardín rectangular es de 58m. Si el lado mayor mide 11m más que el lado menor. ¿Cuánto miden los lados del jardín?
3. Halla un número tal que su mitad más su cuarta parte más 1, sea igual al número pedido.
4. Pedro preguntó a su primo Luis cuántos años tenía, y Luis contestó:

   “Si al triple de los años que tendré dentro de tres años le restas el triple de los años que tenía hace tres años, tendrás los años que tengo ahora”

   ¿Cuántos años tiene Luis?

5. Si a la edad de Rodrigo se le suma su mitad se obtiene la edad de Andrea ¿Cuál es la edad de Rodrigo si Andrea tiene 24 años?
6. En una prueba de conocimientos había que contestar 20 preguntas. Por cada pregunta bien contestada dan 3 puntos y por cada fallo restan 2 puntos. ¿Cuántas preguntas acertó Elena sabiendo que ha obtenido 30 puntos y que contestó a todas?
7. Un granjero lleva al mercado una cesta de huevos, de tan mala suerte que tropieza y se le rompen $2/5$ de la mercancía. Entonces vuelve al gallinero y recoge 21 huevos más, con lo que ahora tiene $1/8$ más que la cantidad inicial. ¿Cuántos huevos tenía al principio?

8. A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, una frente a la otra. La altura de una es de 30 m, la de la otra es de 20 m, y la distancia entre sus troncos, 50 m. En la copa de cada palmera hay un pájaro. De repente los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua, entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzaron y alcanzaron el pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia del tronco de la palmera mayor apareció el pez?

Semana N° 02	Clase N° 06	Tema N° 16: Ecuación de segundo grado

Contenido General: El facilitador debe dar la obtención y explicación de la ecuación de segundo grado.

Contenidos Específicos:

- Definición de ecuación de segundo grado
- Forma General de una ecuación de segundo grado
- Tipos de Ecuaciones de segundo grado
- ¿Cómo resolver una ecuación de segundo grado?
- Demostración de la fórmula para la resolución de esta ecuación

Una **ecuación de segundo** grado es aquella expresión en la que el exponente máximo es 2, que se puede escribir de la forma: $ax^2+bx+c=0$ donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$

Tipos de Ecuaciones de Segundo Grado:

1. $ax^2+bx+c=0$
2. $ax^2+bx=0$
3. $ax^2+c=0$
4. $ax^2=0$

¿Cómo resolver este tipo de ecuaciones?

Las soluciones de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$**,** se obtienen despejando la incógnita x de la siguiente forma:

$$ax^2+bx+c=0$$

$$ax^2+bx=-c$$

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}$$

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

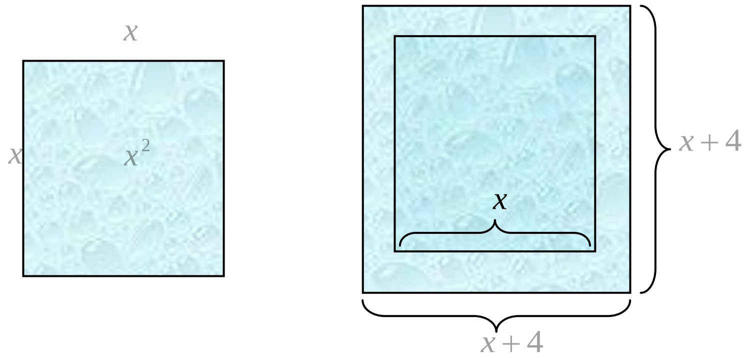
$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Observemos que, mediante este desarrollo genérico, hemos conseguido obtener una fórmula que nos permite conocer las soluciones de cualquier ecuación de segundo grado, sin tener que aplicar el procedimiento de completación de cuadrados cada vez que queremos resolver una ecuación cuadrática. Esta fórmula es conocida como “fórmula de Baskara”.

Para reflexionar

En Tabay se construirá una piscina de forma cuadrada. Pero el ingeniero inspector dice que si se aumenta en 4m cada lado, su área aumenta en 104m^2. Queremos saber ¿cual será el área que cubrirá dicha piscina?



Respuesta:

Podemos establecer las siguientes ecuaciones:

El área de la piscina antes de aumentarle los 4m viene dada por x^2

El área de la piscina después de aumentarle los 4m viene dada por $(x+4)^2$

Cuando el área aumente 4m se puede decir también la siguiente igualdad

$$x^2+104=x^2+8x+16$$

$x^2+104=(x+4)^2$ al desarrollar se obtiene $104-16=8x$

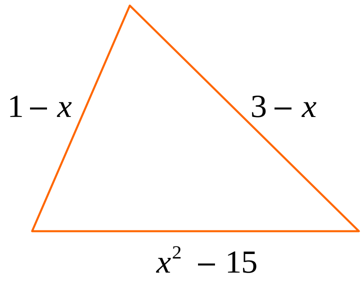
$$88=8x \rightarrow x=11$$

Así el área total que cubrirá la piscina es 225 m^2

Problemas para resolver

1. La edad de Pablo elevada al cuadrado es igual a cinco veces la edad que tendrá dentro de diez años. ¿Qué edad tiene Pablo?

2. El perímetro del siguiente triángulo es de 24 cm ¿Cuál es la longitud de cada uno de sus lados?



3. Calcular la edad de Juan y María sabiendo que sus edades son pares y consecutivas, además el producto de dichas edades es 168. (ayuda: los números pares se escriben de la forma $2k$, $k \in Z$).
4. La longitud del lado largo de un terreno rectangular es doble que el ancho. Si esta longitud se aumenta en 40m y el ancho en 6m, el área se hace doble. Hallar las dimensiones del terreno.
5. La longitud del lado largo de una sala excede a su ancho en 4m. Si cada dimensión se aumenta en 4m el área será el doble. Hallar las dimensiones de la sala.
6. Calcular la longitud de una escalera que está recostada sobre una pared (Formando un triangulo rectángulo), sabiendo que dicha longitud, la altura de la pared y la distancia de la base de la escalera hasta la pared, son tres números consecutivos.
7. El cuadrado de la edad de Carmen disminuida en 9 equivale a 8veces el exceso de su edad sobre 2. Calcular la edad de Carmen.

Semana N° 02	Clase N° 06	Tema N° 17: Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas

Contenido General: El facilitador explicará algunas formas de resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Contenidos Específicos:

- Definición de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas
- Forma General de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas
- Métodos de resolución de ecuaciones lineales (gráfico, analíticos: reducción, sustitución e igualación)

En los temas anteriores planteamos y resolvimos ecuaciones de distinto tipo, pero todas ellas con una sola incógnita. En este tema vamos a estudiar ecuaciones con dos incógnitas, que se designan por las letras x e y.

Definición: Un Sistema Lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es un par de expresiones algebraicas que se suelen representar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = p \\ c\,x + d\,y = q \end{cases}$$

Donde x e y son las incógnitas; a , b , c y d los coeficientes y p , q son los términos independientes.

Los sistemas de ecuaciones responden a planteamientos de problemáticas muy diversas. Por ejemplo, para resolver un problema como el siguiente:

- Entre lápices y borradores tengo diez piezas de material escolar. Si tengo dos lápices más que borradores. ¿Cuántos lápices y borradores tengo?

El sistema que plantea la problemática anterior podría ser el siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Sea x el número de lápices, e y el número de borradores

Cada una de las ecuaciones que componen este sistema, por separado, tendrían infinitas soluciones, ya que hay infinitas parejas de números que sumen 10 y, por otro lado, infinitos pares de números cuya resta sea 2.

Sin embargo, al considerar juntas ambas ecuaciones para formar el sistema, estaremos buscando un par de números $(x\ ,\ y)$ que cumplan las dos **a la vez**.

Ese par de números $(x\ ,\ y)$ que satisface ambas ecuaciones de un sistema se llama **solución** del sistema de ecuaciones.

En el caso del problema que utilizamos como ejemplo, la solución vendría dada por el par de números $(6\,,\,4)$, es decir, $x = 6$ e $y = 4$. Por tanto, la respuesta del problema planteado sería que:

Tengo **seis** lápices y **cuatro** borradores

Es importante resaltar que 6 y 4 **no** son dos soluciones del sistema, sino que es una solución y está formada por dos números

Existen varios métodos para hallar la solución a un sistema de ecuaciones de dos incógnitas. Éstos se dividen en dos grupos: método gráfico y métodos analíticos, en este caso nos enfocaremos solamente en el método analítico, el cual está subdividido en los métodos de: sustitución, igualación y reducción.

De ahora en adelante, iremos viendo, uno por uno, los diferentes métodos analíticos de resolución de los sistemas de ecuaciones. Vamos a empezar pues con el **método de sustitución**, para ello empezamos con un ejemplo de resolución de un sistema mediante este método.

- Entre Ana y Sergio tienen 600 bolívares, pero Sergio tiene el doble de bolívares que Ana. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Llamemos x al número de bolívares de Ana, e y al de Sergio

Vamos a expresar las condiciones del problema mediante ecuaciones:

Si los dos tienen 600 bolívares, esto nos proporciona la ecuación $x + y = 600$. Si Sergio tiene el doble de bolívares que Ana, tendremos que $y = 2\,x$. Ambas ecuaciones juntas forman el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 600 \\ y = 2\,x \end{cases}$$

Vamos a resolver el sistema por el **método de sustitución**. Como en la segunda ecuación la incógnita y ya está despejada. Sustituimos el valor de $y = 2\,x$ en la primera ecuación y luego despejamos, con lo que tendremos:

$$\begin{aligned} x + 2\,x &= 600 \\ 3\,x &= 600 \\ x &= \frac{600}{3} \\ x &= 200 \end{aligned}$$

Luego, para obtener el valor de y basta con sustituir el valor de x en la segunda ecuación.

$$y = 2\ x$$
$$y = 2 \,.\, 200$$
$$y = 400$$

Por tanto, la solución al problema planteado es que:

Ana tiene 200 bolívares y Sergio tiene 400 bolívares

Seguidamente, estudiaremos el **método de igualación** estableciendo la misma problemática del método anterior.

- Entre Ana y Sergio tienen 600 bolívares, pero Sergio tiene el doble de bolívares que Ana. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Para resolver un sistema de ecuaciones por este método hay que despejar una incógnita, la misma, en las dos ecuaciones e igualar el resultado de ambos despejes, obteniendo una ecuación de primer grado.

Expresando nuevamente las condiciones del problema en un sistema de dos ecuaciones, tenemos:

$$\begin{cases} x + y = 600 \\ y = 2\ x \end{cases}$$

Como en la segunda ecuación, la incógnita y está despejada, entonces procedemos a despejar esta misma incógnita en la primera ecuación:

$$x + y = 600$$
$$y = 600 - x$$

Ahora, **igualamos** la ecuación resultante con la segunda ecuación, así:

$$2\ x = 600 - x$$
$$2\ x + x = 600$$
$$3\ x = 600$$
$$x = \frac{600}{3}$$
$$x = 200$$

Y finalmente, sustituimos el valor de x en cualquiera de las ecuaciones en que esté despejada la y para obtener su valor.

$$y = 2\ x$$
$$y = 2 \,.\, 200$$
$$y = 400$$

Por tanto, la solución al problema planteado es que:

Ana tiene 200 bolívares y Sergio tiene 400 bolívares

Es decir, el mismo resultado que habíamos obtenido con el método de sustitución.

Para reflexionar

¿Dependerán las soluciones del sistema de que la incógnita que se despeja para igualar sea la x o la y?

El último de los métodos analíticos que vamos a estudiar para resolver ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas es el **método de reducción**. Para ello, veamos de nuevo el mismo ejemplo de los métodos anteriores pero en este caso resuelto por el **método de reducción**.

- Entre Ana y Sergio tienen 600 bolívares, pero Sergio tiene el doble de bolívares que Ana. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Este método consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones por algún(os) número(s) de forma que obtengamos un sistema equivalente al inicial en el que los coeficientes de la x o y sean iguales pero con signo contrario. Luego, se suman las ecuaciones para obtener una sola ecuación de primer grado con una incógnita. Luego se sustituye la incógnita hallada en una de las ecuaciones del sistema y despejar la otra.

Vamos a expresar nuevamente las condiciones del problema en un sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 600 \\ y = 2x \end{cases}$ entonces: $\begin{cases} x + y = 600 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

Resolveremos el sistema por el **método de reducción**. Para ello, teniendo en cuenta que, en ambas ecuaciones, la y tiene coeficientes opuestos, podemos pasar a sumar directamente ambas y nos quedará:

$$\begin{array}{r} x + y = 600 \\ 2x - y = 0 \\ \hline 3x + 0 = 600 \\ 3x = 600 \\ x = \dfrac{600}{3} \\ x = 200 \end{array}$$

Y finalmente, sustituimos el valor de x en cualquiera de las ecuaciones en que esté despejada la y para obtener su valor.

$$y = 2x$$
$$y = 2 \, . \, 200$$
$$y = 400$$

Por tanto, la solución al problema planteado es que:

Ana tiene 200 bolívares y Sergio tiene 400 bolívares

Con esto concluimos que, no importa por cual método se resuelva un sistema. El resultado siempre será el mismo.

Para reflexionar

En general, ¿por qué números habrá que multiplicar las ecuaciones de un sistema para que se anule una incógnita?

Problemas

1. La edad de Carla es el doble que la edad de Macarena. Hace diez años la suma de las edades era igual a la edad que tiene hoy Carla. ¿Cuál es la edad de cada una en la actualidad?
2. El perímetro de un rectángulo es 30 cm. El doble de la base tiene 6 cm más que la altura. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?
3. Dos estantes contienen en total 40 libros. Al traspasar 5 libros de un estante a otro, resulta que uno queda con el triple del otro. ¿Cuántos libros había originalmente en cada estante?
4. Encuentra las edades de dos hermanos sabiendo que al mayor le faltan dos años para tener cinco veces la edad actual del menor y que si el mayor tuviera seis años menos tendrían la misma edad.
5. Las ciudades A y B están separadas por 180 km. Simultáneamente sale un auto de cada ciudad en el mismo sentido. El que sale de B lo hace con una velocidad de 60 km/h y el que sale de A, a 90 km/h. ¿Al cabo de cuánto tiempo el auto que sale de A alcanza al que sale de B, y cuántos kilómetros ha recorrido cada uno?
6. En un número la cifra de las decenas es el doble de la cifra de las unidades. Si a ese número le restamos 27 se obtiene otro número que resulta de invertir el orden de sus dos cifras. ¿Cuál es el número?
7. La edad de Eliana es 1/5 de la edad de Miguel y hace 5 años, la edad de Eliana era 1/10 de la edad de Miguel. Determinar sus edades actuales.
8. Hace 4 años la edad de Ximena era 8 veces la edad de Matías. En cuatro años más la edad de Ximena será 4 veces la de Matías. ¿Cuál es la edad de cada uno?
9. El largo de una piscina rectangular es 3 veces su ancho. Si su perímetro es de 32 m., ¿cuáles son sus dimensiones?
10. Un niño tiene 2 años menos que el cuádruplo de la edad de su perro. Si la diferencia entre sus edades es 4 años. Encuentra la edad de ambos.

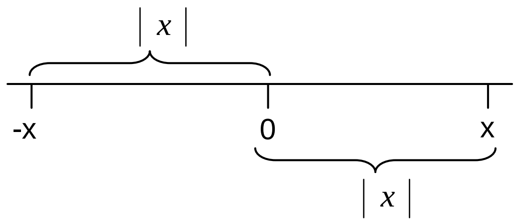
Semana N° 03	Clase N° 07	Tema N° 18: Valor Absoluto

Contenido General: Se debe explicar por medio de ejemplos la definición general del valor absoluto.

Contenidos Específicos:

- Definición de valor absoluto
- Propiedades del valor absoluto

El valor absoluto de un número real x es el resultado de medir la distancia que hay entre x y el cero (0).



Definición: Sea $x \in \mathrm{R}$, el valor absoluto de x, denotado por $|\,x\,|$, se define:

$$|\,x\,| = \begin{cases} x, & si \quad x > 0 \\ -x, & si \quad x \le 0 \end{cases}$$

Algunas Propiedades del Valor Absoluto:

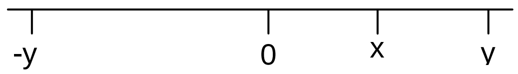
1. $|\,x\,| \ge 0, \quad \forall \; x \in \mathrm{R}$

2. $|\,x\,| = \sqrt{x^2}\,. \quad En\ particular, \;\; si \;\; x^2 = y, \;\; entonces \;\; x = \pm\sqrt{y}$

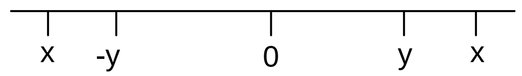
3. $|\,x\,| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$

4. $|\,x\,| = |\,-x\,|, \quad \forall\, x \in \mathrm{R}$

5. $|\,x\,| \le y \;\Leftrightarrow\; -y \le x \le y$



6. $|\,x\,| \ge y \;\Leftrightarrow\; y \le x \;\; ó \;\; x \le -y$



7. $|\,x \cdot y\,| = |\,x\,| \cdot |\,y\,|$

8. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|\,x\,|}{|\,y\,|}\,, \quad y \ne 0$

9. $|\,x + y\,| \le |\,x\,| + |\,y\,|$

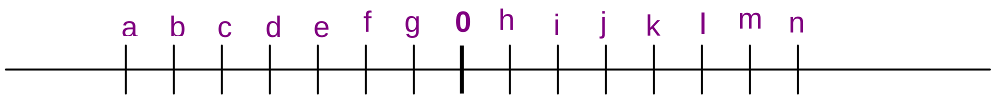
10. $|\,x - a\,| < \delta \;\Leftrightarrow\; a - \delta < x < a + \delta \;\Leftrightarrow\; x \in (\,a - \delta\,, a + \delta\,)$

Ejercicios

1. ¿Cuál es el valor absoluto de cero?

2. ¿El valor absoluto de un número puede ser negativo? ¿Por qué?

3. ¿Qué letras se corresponden con los números enteros cuyo valor absoluto es 1?



4. ¿Qué número tienen valor absoluto 3 y está situado entre -4 y -2?

5. Si el valor absoluto de un número es 12, ¿qué número puede ser?

6. Si el valor absoluto de un número es 12 y sabes que está a la izquierda del 0, ¿qué número es?

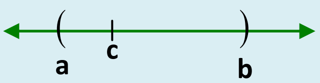
Semana N° 03	Clase N° 07	Tema N° 18: Intervalos

Contenido General: El facilitador dará una breve descripción de los diferentes intervalos en la recta real.

Contenidos Específicos:

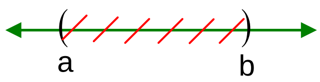
- Definición de Intervalo
- Intervalo abierto
- Intervalo cerrado
- Intervalos semiabiertos
- Intervalos infinitos

Definición: Los intervalos, generalmente los asociamos a segmentos dentro de la recta real con un orden interno entre sus puntos. Sean a, b, c ∈ ℝ c es un punto interior del intervalo. Y el intervalo (a, b) estará constituido por todos los puntos que están entre a y b.

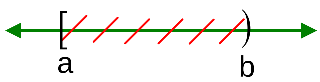


INTERVALOS EN LA RECTA:

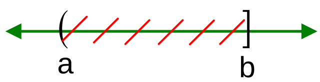
$(a\ ,b\ ) = \{\ x \in \mathrm{R}\ :\ a < x < b\}$



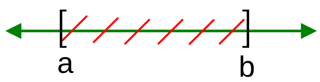
$[a\ ,b\ ) = \{\ x \in \mathrm{R}:\ a \le x < b\ \}$



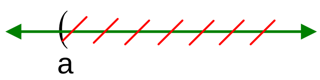
$(a\ ,b\ ] = \{\ x \in \mathrm{R}:\ a < x \le b\ \}$



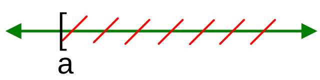
$[a\ ,b\ ] = \{\ x \in \mathrm{R}:\ a \le x \le b\ \}$



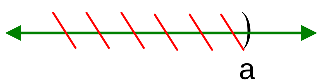
$(a\ ,+\infty) = \{\ x \in \mathrm{R}:\ \ x > a\ \}$



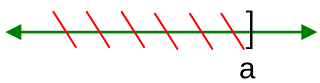
$[a\ ,+\infty) = \{\ x \in \mathrm{R}:\ \ x \ge a\ \}$



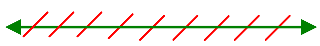
$(-\infty\ ,a\ ) = \{\ x \in \mathrm{R}:\ \ x < a\ \}$



$(-\infty\ ,a\ ] = \{\ x \in \mathrm{R}:\ \ x \le a\ \}$



$(-\infty\ ,+\infty) = \ \ \mathrm{R}$



Ejemplos:

$$\left\{ x \in R \ : \ -\frac{1}{2} < x \leq \sqrt{2} \right\} = \left(-\frac{1}{2} \, , \sqrt{2} \ \right]$$

$$\left\{ x \in R \ : \ x < -\frac{1}{3} \right\} = \left(-\infty \, , -\frac{1}{3} \right)$$

$$\left[e \, , \pi \right) = \left\{ x \in R \ : e \leq x < \pi \right\}$$

Ejercicios

Escribir en forma de intervalo los siguientes enunciados:

- $\left\{ x \in R \ : \ x > -\frac{7}{3} \right\}$ ________________________
- $\left\{ x \in R \ : x \leq \sqrt{12} \right\}$ ________________________
- $\left\{ x \in R \ : \ -5 < x \leq -2 \right\}$________________________
- $\left\{ x \in R \ : \ x < \frac{1}{2} \right\}$ ________________________
- $\left\{ x \in R \ : \ x \geq -\frac{1}{1000} \right\}$ ________________________

Semana N° 03	Clase N° 07	Tema N° 20: Inecuaciones y Desigualdades

Contenido General: El facilitador debe enseñar por medio de problemas de aplicaciones la resolución algebraica y geométrica de Inecuaciones.

Contenidos Específicos:

- Definición de Inecuaciones
- Propiedades
- Resolución de Inecuaciones

¿Cuáles son los números que al sumarles 3 dan como resultado un número menor que 5?

Primero identificamos los datos que nos proporciona el problema:

x Número desconocido

$x+3$ Número desconocido sumándole 3

$x+3<5$ Número que al sumarle 3, resultan un número menor que 5

Sólo necesitamos DESPEJAR la incógnita para conocer qué números verifican nuestra expresión algebraica.

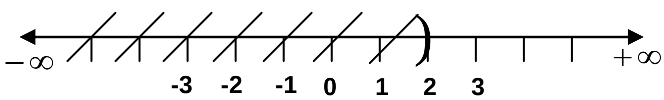
$$x+3<5$$
$$x<5-3$$
$$x<2$$

El número obtenido $x<2$, nos indica que el número que buscamos puede ser *cualquier número real menor que 2*.

Una **INECUACIÓN** es una desigualdad que tiene por lo menos un valor desconocido o incógnita y que se cumple para ciertos valores de ella.

La solución de nuestro problema expresada en forma de INTERVALO es:

$S:(-\infty\ ,\ 2)$



PROPIEDADES:

- Consideremos la desigualdad $-2<7$ y sumémosles a ambos miembros el número 8.

¿Cómo es dicha desigualdad respecto de la original? ______________________

- Consideremos la misma desigualdad $-2 < 7$, pero sumémosles a ambos miembros el número negativo –8.

¿Cómo es dicha desigualdad respecto de la original?____________________________

CONCLUSIÓN:

Sean a, b, c $\in$ **R**, si $a < b$, entonces

$a + c < b + c$.

- Luego, consideremos la desigualdad $5 < 10$ y multipliquemos ambos miembros por 4.

¿Cómo es dicha desigualdad respecto de la considerada?__________________

- Partamos de la misma desigualdad $5 < 10$, y multipliquemos ambos miembros por el número negativo –4.

¿Cómo es dicha desigualdad respecto de la considerada?

CONCLUSIÓN:

Sean a, b, c $\in$ **R**, si $a < b$ y $c > 0$,

entonces $a . c < b . c$

Pero si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a . c > b . c$

- Ahora, consideremos la misma desigualdad $5 < 10$ y elevamos ambos miembros por el exponente 2.

¿Cómo es dicha desigualdad respecto de la considerada?______________________

- Y por último, consideremos la desigualdad $5 < 10$ y elevamos ambos miembros por el exponente negativo – 2.

¿Cómo es dicha desigualdad respecto de la considerada?______________________

CONCLUSIÓN:

Sean a, b, n $\in$ $\mathbf{R}^+$, si $a < b$, entonces $a^n < b^n$

Pero si $a < b$ y $n \leq 0$, entonces $a^n > b^n$

Ahora estamos en condiciones de resolver problemas de la siguiente forma:

- El tanque de gasolina de un auto puede contener hasta 45 litros. Tiene conectado un sistema automático de alarma que se enciende cuando sólo quedan 8 litros en él. ¿Cuántos litros de gasolina es posible cargar cuando recién enciende la señal?

Si designamos con x la cantidad de litros que podemos cargar, el problema queda planteado con la siguiente desigualdad:

$$8 + x \leq 45$$

Donde 8 representa la reserva, x los litros a cargar y 45 la capacidad máxima del tanque.

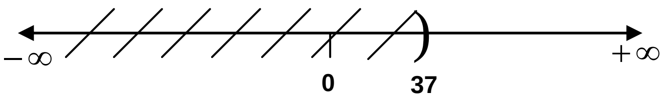
Así, la solución queda determinada por:

$$\begin{aligned} 8 + x &\leq 45 \\ x &\leq 45 - 8 \\ x &\leq 37 \end{aligned}$$

De esta manera, podemos cargar cualquier cantidad de litros, siempre que sea menor o igual que 37

La solución algebraica y geométrica de esta inecuación es la siguiente:

$S: (-\infty , 37]$

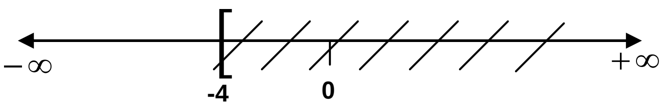


- Veamos otro ejemplo:

Resolver la inecuación $\dfrac{-2x+4}{3} \leq 4$

$$\begin{aligned} -2x + 4 &\leq 4.3 \\ -2x + 4 &\leq 12 \\ -2x &\leq 12 - 4 \\ -2x &\leq 8 \\ -x &\leq \frac{8}{2} \\ (-1).-x &\leq 4 \\ x &\geq -4 \end{aligned}$$

$S: [-4 , +\infty)$



Para reflexionar

1. ¿Cuántos números hay menores que 9?, ¿Cómo expresarías cualquier número menor que 9?, ¿Cómo indicarías en la recta numérica los números menores que 8?

2. ¿Cuáles son los números que al restarle 5 dan como resultado un número menor que 3?, ¿Cuántos hay?, ¿Cómo expresarías cualquiera de estos números?, Represéntelos todos en la recta numérica.

3. Si sabemos que el lado de un cuadrado es mayor o igual que ocho, ¿qué podemos decir de su perímetro?

4. La solución a la inecuación $-x < x$ es: ______________________________

5. En una residencia estudiantil, se desea construir una piscina rectangular de tal forma que uno de los lados sea el triple del otro, y su perímetro es menor a 160m. Calcular el conjunto solución para cada lado.

6. Recuerda que cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. Imagina que x e y son dos lados de un triángulo cuyos valores son x = 1 e y = 12. ¿Qué podrías decir del lado z?

7. Para Ender sacar la Licencia de Conducir de grado 4, debe tener una edad mayor o igual a 21 años. Si esto puede ser realidad dentro de 7 años. Calcular la posible edad de Ender actualmente, sabiendo que el día de ayer cumplió 12 años.

8. Dentro de siete años Pablo seguirá siendo menor de edad. ¿Cuál podría ser la edad de Pablo actualmente?

9. Carolina es tres años mayor que Juanita. La suma de sus edades no llega a 35 años. ¿Cuántos años tiene Juanita?

Semana N° 03	Clase N° 08	Tema N° 21: Factorización

Contenido General: Se deben dar los principales casos de Factorización.

Contenidos Específicos:

- Factor común
- Trinomio cuadrado perfecto
- Diferencia de cuadrados
- Trinomio de la forma x^2+bx+c
- Trinomio de la forma ax^2+bx+c

CASOS DE FACTORIZACIÓN:

1. **Por Factor Común:**

La idea es escribir una expresión polinómica en el producto de dos o más factores.

Ejemplo 1: $3x^5-2x^4-5x = x.(3x^4-2x^3-5)$

Ejemplo 2: $xa+ma+xb+mb = a\underbrace{(x+m)}+b\underbrace{(x+m)} = (a+b).(x+m)$

Ejercicios para Resolver	Ejercicios Propuestos
$6x^2+2x^4-4x^6$	$(1+3a).(x+1)-2a(x+1)+3(x+1)$
$2x(x+y+z)-x-y-z$	$a^2b^3-n^4+a^2b^3x^2-n^4x^2-3a^2b^3x+3n^4x$
$15y^5+20y^2-5y$	$14x^2y^2-28x^3+56x^4-70y^3x^4$

2. **Trinomio Cuadrado Perfecto:** $(x\pm y)^2 = x^2\pm 2xy+y^2$

Ejemplo: $x^2+bx+\dfrac{b^2}{4} = x^2+2.\left(\dfrac{b}{2}\right).x+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = \left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2$

Ejercicios para Resolver	Ejercicios Propuestos
$a^2+2a(a-b)+(a-b)^2$	$x^2+3x+\dfrac{9}{4}$
$16x^6-2x^3y^2+\dfrac{y^4}{16}$	$9(x-y)^2+12(x-y).(x+y)+4(x+y)^2$
y^4+1+2y^2	$1+14x^2y+49x^4y^2$
$36+12m^2+m^4$	$-6x+9+x^2$

3. **Diferencia de Cuadrados:** $x^2 - y^2 = (x-y).(x+y)$

Ejemplo: $(7a)^2 - (3b)^2 = (7a-3b)\,.\,(7a+3b)$

Ejercicios para Resolver **Ejercicios Propuestos**

$a^2 + 2\,ab + b^2 - 1$	$(5x)^2 - (2y)^2$	$-36m^4 + 9x^2y^6$
$a^2 + m^2 - 4b^2 - 2am$	$(2a)^2 + 4ab + b^2 - 9$	$\frac{1}{16} - x^2y^2$
$25a^2 - 4b^2$	$100 - 81x^2$	$\frac{4}{y^2} - 16m^4w^6$

4. **Trinomio de la forma:** $x^2 + bx + c$

Ejemplo: $x^2 - 2x - 8 = (x- \quad)(x+ \quad)$ $\qquad (x-\ 4)(x+\ 2)$

Ejercicios para Resolver **Ejercicios Propuestos**

$a^2 - 7a + 12$	$x^2 - 6 - x$	$-35 - 2x + x^2$
$x^2 - 5x - 36$	$20 + x^2 - 21x$	$x^2 + 10x + 21$
$x^2 + 5x - 24$	$x^2 - 60 + 7x$	$m^2 + 6m - 16$

5. **Trinomio de la forma:** $ax^2 + bx + c$

$3x^2 - 5x - 2$ Primero ordenamos el trinomio en forma descendente, luego multiplicamos el trinomio por el coeficiente del primer termino excepto el segundo termino el cual solo lo dejamos indicado, seguidamente procedemos análogamente al caso anterior y finalmente dividimos entre el coeficiente del primer trinomio. $3 \cdot (3x^2 - 5x - 2) = 9x^2 - 5(3x) - 6 \qquad \to (3x- \ )(3x+ \ )$

$$\frac{(3x-6)(3x+1)}{3} = (x-2)(3x+1)$$

Ejercicios para Resolver **Ejercicios Propuestos**

$5x^2 + 13x - 6$	$x - 6 + 15x^2$	$3x^2 - 14x - 5$
$2x^2 + 3x - 2$	$8x^2 - 14x - 15$	$2x^2 + 5x + 2$
$5x^2 + 3x - 2$	$7x^2 - 30x + 27$	$6x^2 - 6 - 5x$

Nota: los casos anteriores también se pueden resolver utilizando la ecuación de segundo grado $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Semana N° 03	Clase N° 09	Tema N° 22: Relaciones y Funciones

Contenido General: El facilitador debe deducir por medio de ejemplos las definiciones de Relación y Función.

Contenidos Específicos:

- Definición de Relación
- Definición de Función
- Dominio, Codominio y Rango de una Función
- Traslación de Funciones
- Tipos y gráficas de Funciones Numéricas

Vamos a considerar aspectos intuitivos que nos proporciona la vida diaria con relación a la propiedad que existe entre los diversos individuos de un conjunto. Por ejemplo:

* Existe relación entre los estados y capitales, entre vocales.

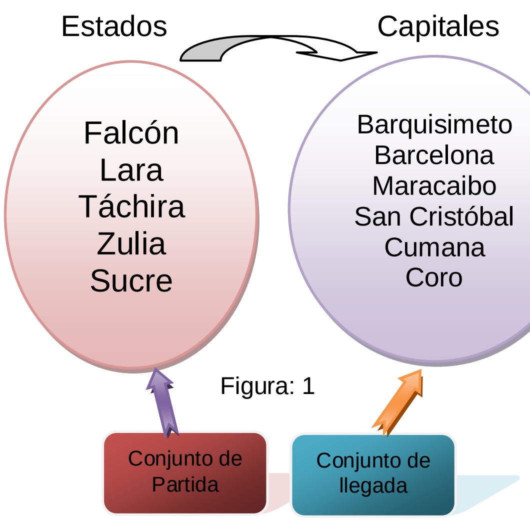


Figura: 1

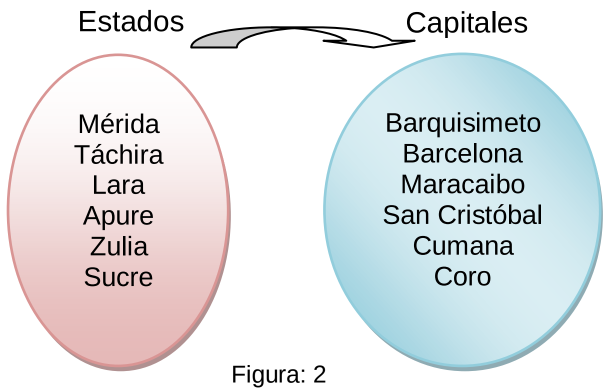


Figura: 2

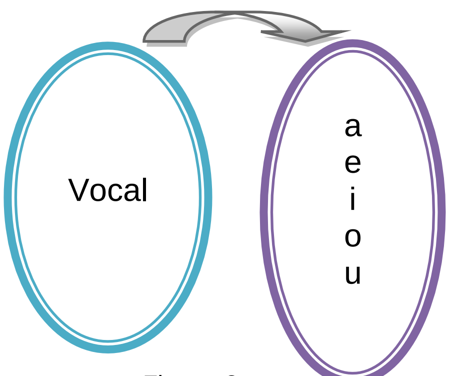


Figura: 3

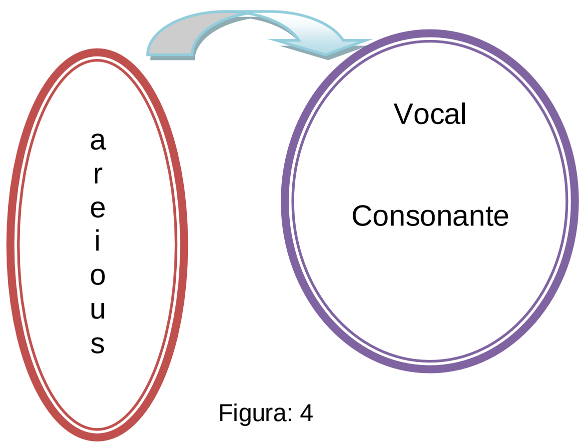


Figura: 4

Las 4 figuras anteriores representan diferentes ejemplos de *Relaciones*. Donde cada una tiene un conjunto de partida y un conjunto de llegada.

Vemos que en el ejemplo 1 sobra un elemento en el conjunto de llegada, en el ejemplo 2 vemos que tanto en el conjunto de partida como en el con junto de llegada quedan elementos sin asociar, en el ejemplo 3 podemos observar que el conjunto de partida se le asigna a todos los elementos del conjunto de llegada, finalmente en el ejemplo 4 podemos observar que varios elementos del conjunto de partida llegan a una misma imagen en el conjunto de llegada.

Una **Relación** de un conjunto A en un conjunto B se puede establecer como un conjunto de pares ordenados cuyas primeras componentes están en A y sus segundas compontes están en B

Recordemos que par ordenado es un término indefinido cuya notación estándar es: (a,b) donde a es el primer elemento y b es el segundo elemento.

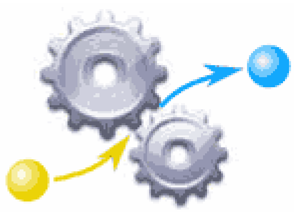
En una relación de A en B, el conjunto A se llama **conjunto de partida** y el conjunto B se llama su **codominio** o **conjunto de llegada elemento.**

Para reflexionar

- Dados los conjuntos $A=\{1,2,3,4\}$ y $B=\{5,6,7,8\}$, vamos a establecer la relación *"divide a"* diremos que los elementos $a \in A$, $b \in B$ están relacionados, si a divide a b.
- Si $A=\{-3,0,1,7\}$ y $B=\{-10,-1,4,5\}$ ¿Qué relación se puede establecer en la que los elementos de la primera componente sean menores que los de la segunda?

Sean A y B conjuntos. Al conjunto formado por todos los pares ordenados de primera componente en A y segunda componente en B, se le denota $A \times B$ y se le llama ***Producto Cartesiano*** de A y B. Simbólicamente: $A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$

Función: sean A y B conjuntos no vacíos. Una función f de A en B, denotada $f : A \to B$, es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, donde $A \times B = \{ (a, b) : a \in A \ y \ b \in B \}$ y el par ordenado (a,b) se define como $(a,b) = \{ \{a\}, \{a, b\} \}$, tal que:



a.) Para cada $a \in A$ el par $(a,b) \in f$, para algún $b \in B$ y

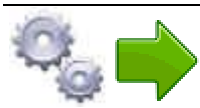
b.) Si $(a,b), (a,c) \in f$ entonces $b = c$

Una función f es una relación que cumple con dos condiciones:

- Todos los elementos del conjunto de partida están relacionados
- Cada elemento del conjunto de partida sólo tiene relación con un elemento del conjunto de llegada.

Lo que puede entrar **en una función se llama el** dominio

Lo que es posible que salga **de una función se llama el** codominio



Lo que en realidad sale **de una función se llama** rango **o** imagen

De manera formal se tiene que

El Dominio de una función f, se designa por $Dom(f)$, y se define como el conjunto de valores de x para los cuales existe la función, es decir, para los cuales podemos calcular $y = f(x)$

La letra f simboliza la asignación u operación que hay que hacer a la x, que llamaremos variable independiente, al valor $f(x)$ se le llama variable dependiente o imagen de x.

El Codominio de una función $f: A \to B$, es el conjunto de llegada, en este caso B y se denota $Cod(f)=B$

El Rango de una función $f: A \to B$ se denota como $R(f) = \{b \in B : \exists\, a \in A ; (a, b) \in f\}$

Cuando $(x, y) \in f$ escribimos $y = f(x)$. Así podemos escribir: $R(f) = \{b \in B : y = f(x) ; x \in A\}$

¿Función o ecuación?

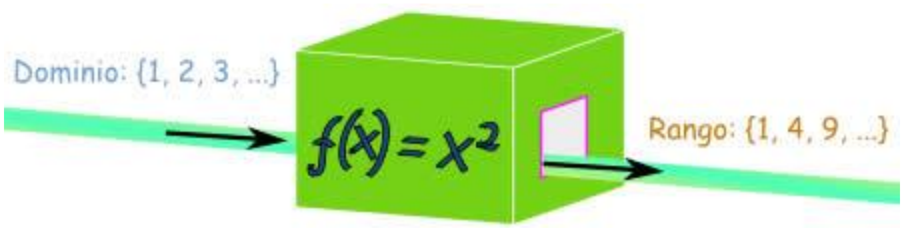
En muchos casos concretos la regla de asociación de una función viene dada en forma de una fórmula o ecuación. Esto hace en ocasiones difícil distinguir los conceptos de función y ecuación. Ya vimos que una función consta de un par de conjuntos y una regla de asociación. En el caso de la ecuación tenemos solamente una igualdad entre dos expresiones que normalmente involucra cantidades desconocidas, llamadas también variables. Las variables se denotan usualmente por las últimas letras del alfabeto. Se dice que una ecuación se satisface si al reemplazar las variables con los valores correspondientes la igualdad se verifica. Por ejemplo, la ecuación 2x + 5 = 13 se satisface para x = 4.

Las funciones Algebraicas: son aquellas construidas por un número finito de operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación).

En general, las funciones algebraicas abarcan a las funciones polinomiales, racionales y las llamadas algebraicas explicitas.

Para reflexionar

Una simple función como $f(x) = x^2$ puede tener **dominio** (lo que entra) los números de contar $\{1, 2, 3, ...\}$, y el **rango** será entonces el conjunto $\{1, 4, 9, ...\}$

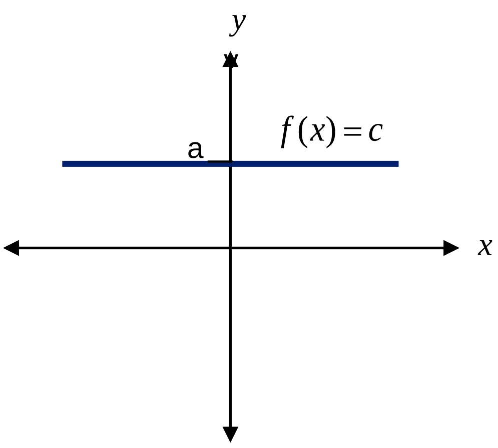


Semana N° 01	Clase N° 12	Tema N° 23: Tipos de Funciones

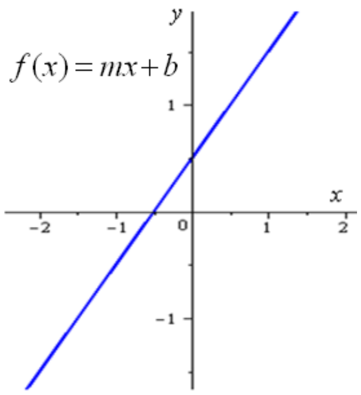
TIPO DE FUNCIÓN	FORMA	DOMINIO	CODOMINIO	RANGO	GRÁFICA
Constante	$f(x)=c$	$Dom(f)=R$	$Cd(f)=R$	$R(f)=\{c\}$	1
Lineal ó a fin	$f(x)=mx+b$	$Dom(f)=R$	$Cd(f)=R$	$R(f)=R$	2
Cuadrática	$f(x)=ax^2+bx+c$	$Dom(f)=R$	$Cd(f)=R$		3
Valor Absoluto	$f(x)=\vert x \vert$	$Dom(f)=R$	$Cd(f)=R$		4
Parte Entera	$f(x)=[\, x \,]$	$Dom(f)=R$	$Cd(f)=R$	$R(f)=Z$	5
Cúbica	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$	$Dom(f)=R$	$Cd(f)=R$		6
Raíz Cuadrada	$f(x)=\sqrt{x}$	$Dom(f)=[0,+\infty)$	$Cd(f)=R$	$R(f)=[0,+\infty)$	7
Seno	$f(x)=sen\,x$	$Dom(f)=R$	$Cd(f)=R$	$R(f)=[-1\,,\,1]$	8
Coseno	$f(x)=\cos x$	$Dom(f)=R$	$Cd(f)=R$	$R(f)=[-1\,,\,1]$	9
Tangente	$f(x)=\tan x$	$Dom(f)=R-\left\{x:x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right\}$	$Cd(f)=R$	$R(f)=R$	10
Exponencial	$f(x)=a^x$	$Dom(f)=R$	$Cd(f)=R$	$R(f)=(0,+\infty)$	11
Logaritmo	$f(x)=\log_a x\,,\quad a>0$	$Dom(f)=(0,+\infty)$	$Cd(f)=R$	$R(f)=R$	12
Polinómica	$f(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$	$Dom(f)=R$	$Cd(f)=R$		

La grafica de una función f se define como la grafica de la ecuación correspondiente $y = f(x)$ el conjunto de todos los puntos en el plano cartesiano de la forma $(x, f(x))$ donde x está en el dominio de f.

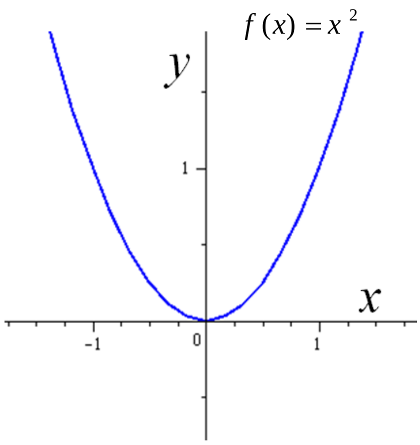
1. Función Constante



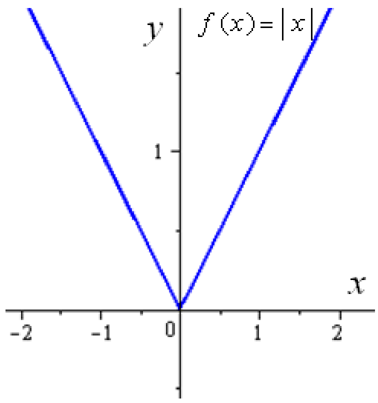
2. Función afín.



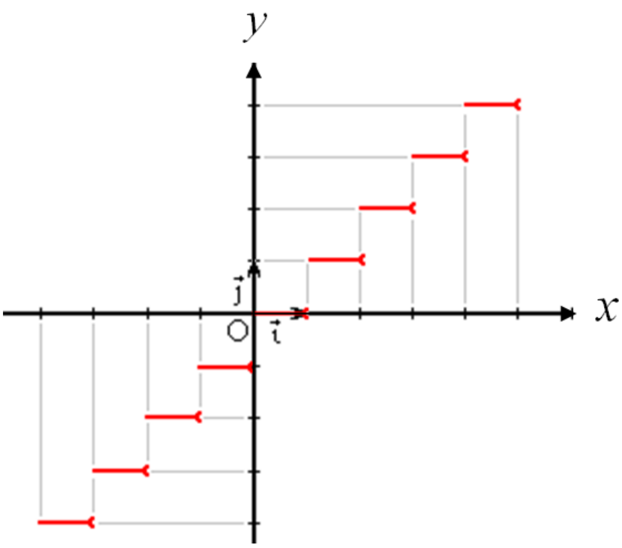
3. Función Cuadrática



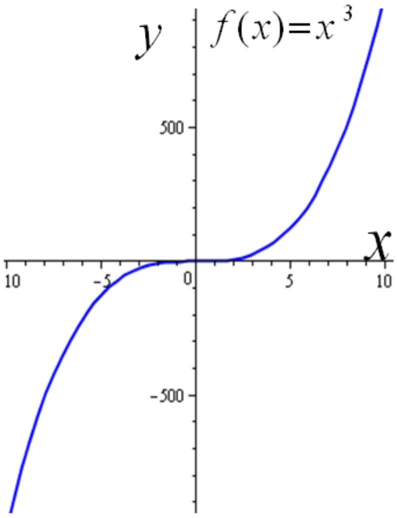
4. Función Valor Absoluto



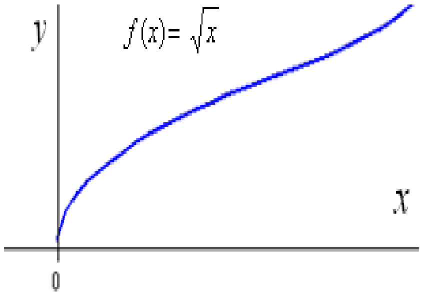
5. Función parte Entera



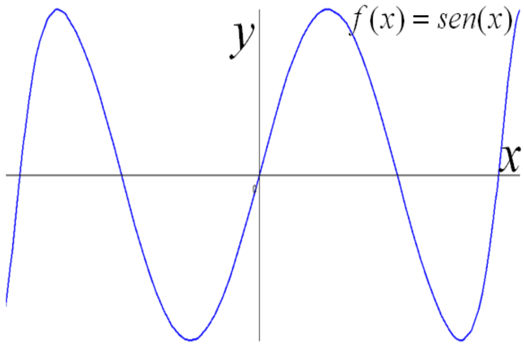
6. Función cubica



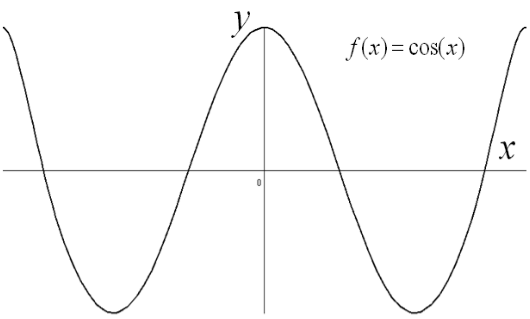
7. Función Raíz Cuadrada



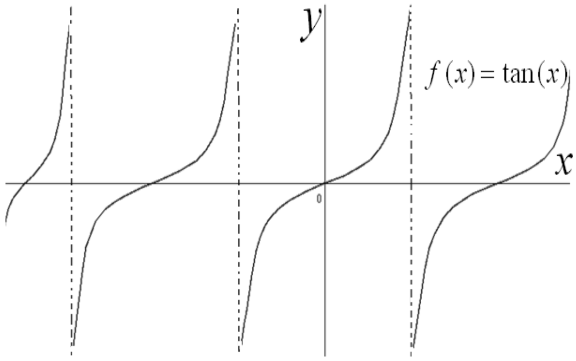
8. Función Seno



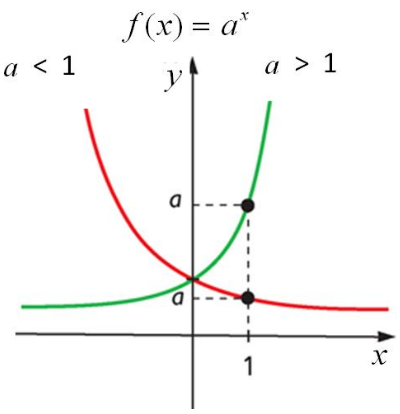
9. Función Coseno



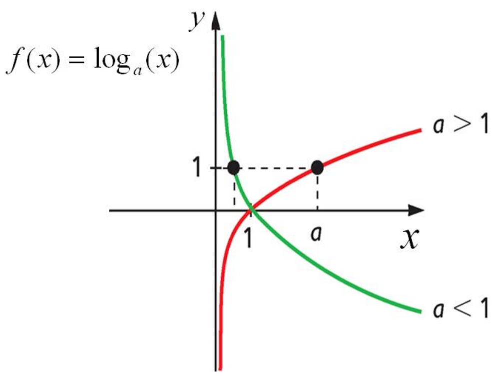
10. Función Tangente



11. Función Exponencial



12. Función Logarítmica.

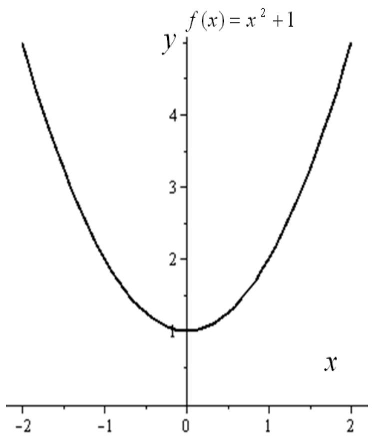


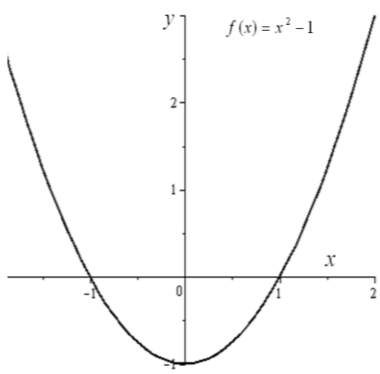
TRASLACIÓN DE FUNCIONES

Definición de la función g	Operación a realizar a la grafica de f, para obtener la grafica de g
$g(x) = f(x) + k$	Traslación vertical: hacia arriba, k unidades
$g(x) = f(x) - k$	Traslación vertical: hacia abajo, k unidades
$g(x) = f(x + k)$	Traslación horizontal: desplaza a la izquierda, k unidades
$g(x) = f(x - k)$	Traslación horizontal: desplaza a la derecha, k unidades

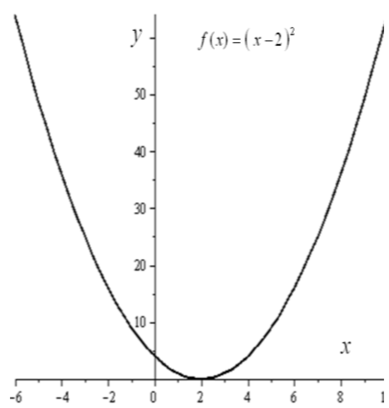
Veamos las Siguientes Funciones Trasladadas

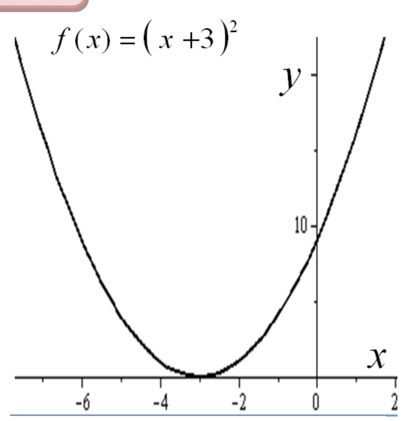
Traslación en el eje y



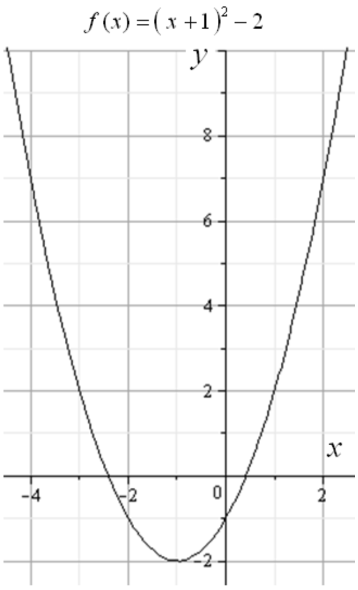


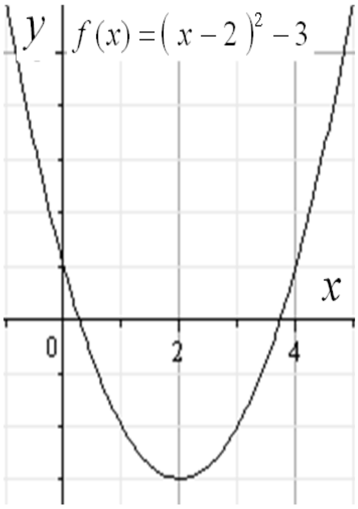
Traslación en el eje x





Traslación en los dos ejes





Realizar las siguientes gráficas y compararlas con las básicas:

1. $f(x) = x^3 + 3$
2. $f(x) = (x-1)^3 - 5$
3. $f(x) = -\sqrt{x+2}$
4. $f(x) = \sqrt{-x} + 1$
5. $f(x) = -\sqrt{x-1} + 3$
6. $f(x) = |x+5| - 1$
7. $f(x) = -|x-1| + 4$
8. $f(x) = -x + 3$
9. $f(x) = 18$
10. $f(x) = x - 10$

Para hallar el dominio de una función se pueden tomar en cuenta las siguientes condiciones según el tipo de función

$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, para n par se debe cumplir que $g(x) \geq 0$

1. $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, para n impar $Dom(f) = Dom(g)$
2. $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, $h(x) \neq 0$ $\quad Dom(f) = Dom(g) \cap Dom(h)$
3. $f(x) = g(x) + h(x) + j(x)$; $Dom(f) = Dom(g) \cap Dom(h) \cap Dom(j)$

Hallar el dominio de las siguientes funciones

$f(x)=\dfrac{x^3-2x+5}{x-3}$	$f(x)=x^5-2x+5-\dfrac{3}{5}x^4+11x^2$
$f(x)=\sqrt{x-15}$	$f(x)=\dfrac{-3x^3+2x-23x^2}{3x^2-7}$
$f(x)=\sqrt[3]{6x-10}$	$f(x)=\dfrac{7x^6+2x^3+3x^2-x+3}{7\sqrt{2x}+4}$
$f(x)=\sqrt[6]{x^2-5}$	$f(x)=\dfrac{5x-2}{7-x}$
$f(x)=\dfrac{3x^5-2x^3+5x-23}{x^2-3}$	$f(x)=\sqrt[5]{x^2-7}$
$f(x)=\sqrt[7]{11x^4-5x+12}$	$f(x)=\dfrac{3-x}{x^2+3}$
$f(x)=\dfrac{4x^3-7x-9}{7x+8}$	$f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{7x+8}$
$f(x)=\dfrac{x^2-2x+12}{3x^4+11}$	$f(x)=\dfrac{5x^2-6x-17}{2x^2-11}$

Semana N° 02	Clase N° 13	Tema N° 25: Errores Comunes

Contenido General: El facilitador dará a conocer una diversidad de errores que se cometen generalmente a la hora de realizar algunas operaciones.

Se simplifica la expresión $\frac{x^2-y^2}{x-y}=x+y$ para todos los números reales x, y	Considerar la siguiente relación como cierta: $x+y-3(z+w)=x+y-3z+w$
Multiplicamos de esta forma: $x\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{ax}{bx}$	La potencia $a^2\cdot b^5=(a\cdot b)^7$ se considera correcta.
Se dice que $3a+4b=7ab$ es cierta.	Asumir la linealidad en: $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$
Erramos al escribir: $2x^{-1}=\frac{1}{2x}$	Otro error común: $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$
Creer que $\frac{1}{x-z}=\frac{-1}{x+z}$, es cierta.	También simplificamos así: $\frac{x+y}{x+z}=\frac{y}{z}$
	Simplificamos: $\frac{xa+xb}{x+xd}=\frac{a+b}{b}$
Creemos que $\sqrt{-x}\sqrt{-y}=\sqrt{xy}$	Erramos cuando $\frac{1}{1-\frac{x}{y}}=\frac{y}{1-x}$
Los clásicos errores: $(x+1)^2=x^2+1$ ó $(x-1)^2=x^2-1$	Racionalizando escriben: $\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2}\right)=1$
$\frac{a/b}{c}=\frac{a\ c}{b}$	$\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}}=\sqrt{y}$
$2(x-4)^2=(2x-8)^2=4x^2-32x+64$	En la dirección de los errores clásicos concluir que: $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2=a+b$